

ANÁLISE DE ESTABILIDADE ROBUSTA PELO MÉTODO DE EVOLUÇÃO DIFERENCIAL

DEVAIR DE MOURA MARCOS, EDUARDO NUNES GONÇALVES*

**Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica UFSJ/CEFET-MG
Departamento de Engenharia Elétrica - CEFET-MG, Av. Amazonas 7675
Belo Horizonte, MG, Brasil*

Email: devauaiso@yahoo.com.br, eduardong@des.cefetmg.br

Abstract— This work presents a new methodology for robust stability analysis of uncertain time-invariant linear systems represented by a polytopic system models. Analysis formulations based on linear matrix inequalities are quite popular but they may fail in the case of systems with higher order or more polytope vertices. In a previous work, it was verified that combining an analysis formulation based on linear matrix inequalities with a polytope division technique, it is possible to determine whether a polytopic system is robustly stable or to locate an unstable system instance in the polytope otherwise. The only downside of the method based on polytope division method is the fact that the computational cost grow rapidly with the complexity of the system. Thus, the contribution of this work is to propose an alternative method of robust stability analysis with lower computational cost. It is proposed to apply the differential evolution optimization algorithm to try to locate an unstable system in the polytope. After several experiments with different implementations and different configurations for the algorithm, it is presented an implementation version with high success rate for identification of non robustly stable systems. We present the results of extensive testing with 900 polytopic systems generated randomly.

Keywords— Robust stability, polytopic systems, differential evolution algorithm.

Resumo— Este trabalho apresenta uma nova metodologia de análise de estabilidade robusta de sistemas lineares invariantes no tempo, incertos, representados por modelos de sistema politópicos. Formulações de análise baseadas em desigualdades matriciais lineares são bastante populares, mas podem falhar no caso de sistemas de ordem mais elevada ou com maior número de vértices do politopo. Em trabalho anterior foi verificado que, combinando uma formulação de análise baseada em desigualdades matriciais lineares com uma técnica de divisão de politopo, é possível determinar se um sistema politópico é robustamente estável ou localizar uma instância de sistema instável no politopo em caso contrário. A única desvantagem do método de divisão de politopo é o fato do custo computacional crescer rapidamente com a complexidade do sistema. Desse modo, a contribuição desse trabalho é propor uma forma alternativa de análise de estabilidade robusta com menor custo computacional. É proposto aplicar o algoritmo de otimização de evolução diferencial para tentar localizar um sistema instável no politopo. Após vários experimentos, com diferentes formas de implementação e diferentes configurações do algoritmo, é apresentada uma versão de implementação com alta taxa de sucesso para identificação de sistemas que não são robustamente estáveis. São apresentados os resultados de testes exaustivos com 900 sistemas politópicos gerados de forma aleatória.

Palavras-chave— Estabilidade robusta, sistemas politópicos, algoritmo de evolução diferencial

1 Introdução

A representação de sistemas de controle por sistemas lineares invariantes no tempo (SLIT) é bastante empregada devido a sua maior simplicidade de análise e de síntese e todo o desenvolvimento consolidado na área. A aplicabilidade de SLIT é ainda maior quando incluídas incertezas no modelo. Uma forma bastante empregada de representar sistemas incertos são os sistemas politópicos. A popularidade de sistemas politópicos é devida às formulações de análise e síntese baseadas em desigualdades matriciais lineares (LMIs, do inglês *linear matrix inequalities*) (Boyd et al., 1994). Através das formulações LMI, é possível analisar e projetar sistemas de controle considerando somente os vértices do politopo.

Existem diferentes formulações LMI para a análise de estabilidade robusta de SLIT, tanto contínuo como discreto no tempo, ou no formato mais geral de $\mathcal{D}$ -estabilidade (Chilali and Gahinet, 1996), derivadas das condições de estabilidade segundo Lyapunov. A condição de estabi-

lidade quadrática (Boyd et al., 1994), baseada em uma função de Lyapunov simples, com uma única variável de Lyapunov para todos os vértices, é a formulação mais simples, porém a mais conservadora. Para reduzir o conservadorismo, podem-se utilizar variáveis de Lyapunov dependentes de parâmetros (Peaucelle et al., 2000; Ramos and Peres, 2002; Leite and Peres, 2003; Oliveira and Peres, 2005) e funções de Lyapunov com dependência polinomial de parâmetros (Bliman, 2004; Henrion et al., 2004; Chesi et al., 2005; Oliveira and Peres, 2006; Chesi, 2008; Chesi, 2010). Como verificado em Leite and Peres (2003) e Gonçalves et al. (2007), a eficiência da formulação LMI de análise diminui com o aumento do número de vértices do politopo ou da ordem do sistema. É possível obter formulações menos conservadoras aumentando o número de variáveis de decisão ao custo de um maior tempo de processamento. Mesmo com formulações LMIs mais complexas, nem sempre é possível determinar se um sistema politópico é robustamente estável ou não. Este fato motivou o desenvolvimento de um método de análise com-

binando formulações LMIs com uma técnica de divisão de politopo (Gonçalves et al., 2006; Gonçalves et al., 2007). Foi verificado que, quando uma formulação baseada em LMIs é não factível para um determinado politopo, ela pode ser tornar factível se for aplicada as subdivisões do politopo. Desse modo é possível determinar se um sistema é robustamente estável dividindo cada politopo até que todos deles resultem em uma solução factível para formulação de análise LMI. Caso o sistema não seja robustamente estável, é possível localizar uma instância de sistema instável correspondente a um dos vertices dos politopos. O método LMI/divisão pode ser visto como uma condição necessária e suficiente para análise de estabilidade robusta. Em (Gonçalves et al., 2007) foi verificado que o método LMI/divisão requer menor custo computacional do que formulações LMIs mais complexas. Uma outra alternativa é a abordagem randomizada para análise que busca garantir uma certa precisão probabilística, admitindo um determinado risco (Tempo et al., 1997; Ugri-novskii et al., 2004; Calafiore et al., 2011).

O método LMI/divisão possui a mesma vantagem das formulações LMIs relacionado com o aumento do custo computacional com o aumento da ordem do sistema ou do número de vértices do politopo. Esse fato motiva o desenvolvimento de metodologias alternativas de análise de estabilidade robusta de SLIT. A contribuição desse trabalho é propor e avaliar uma metodologia de análise de estabilidade robusta baseada no algoritmo de evolução diferencial (DE, do inglês *Differential Evolution*). O Algoritmo DE é um algoritmo de otimização evolucionário baseado em populações. A escolha do algoritmo DE se deve ao fato de sua simplicidade de implementação e capacidade para obter o mínimo global de uma função não convexa de forma eficiente e com menor custo computacional que outros algoritmos de otimização baseados em populações.

Esse trabalho é organizado como descrito a seguir. Na seção 2 é apresentada a formulação do problema de análise de estabilidade robusta em termos de um problema de otimização que possa ser resolvido pelo algoritmo DE. Na seção 3 é proposta uma implementação do algoritmo DE e uma configuração de parâmetros adotada obtidas após vários testes com diferentes possibilidades. Na seção 4 são apresentados os resultados de testes exaustivos do método DE proposto para analisar a viabilidade de seu uso como estratégia de análise de estabilidade robusta de SLIT. Por fim, são apresentadas as conclusões do estudo realizado.

2 Formulação do problema

Considere o sistema linear invariante no tempo descrito por

$$\dot{x}(t) = A(\chi)x(t) \quad (1)$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de variáveis de estado. Considere que a matriz $A(\chi)$ pode possuir parâmetros incertos que pertencem a um conjunto compacto convexo, ou politopo, definido por seus vértices:

$$\mathcal{A} \triangleq \left\{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A = \sum_{i=1}^{\eta} \chi_i A_i; \chi \in \Omega \right\}, \quad (2)$$

$$\Omega \triangleq \left\{ \chi \in \mathbb{R}^{\eta} : \chi_i \geq 0, \sum_{i=1}^{\eta} \chi_i = 1 \right\}, \quad (3)$$

sendo A_i , $i = 1, \dots, \eta$, os vértices do politopo e $\chi = [\chi_1 \dots \chi_{\eta}]^T$ o vetor que parametriza o politopo. O sistema politópico é robustamente estável se todos os autovalores de $A(\chi) \in \mathcal{A}$, para todo $\chi \in \Omega$, estão localizados no semi-plano esquerdo do plano- S , isto é, possuem parte real negativa.

A estabilidade robusta do sistema (1) pode ser facilmente verificada pelo seguinte problema de factibilidade LMI: o sistema (1) é quadraticamente estável se existe $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $P \succ 0$ e

$$A_i^T P + P A_i \prec 0, \quad (4)$$

para $i = 1, \dots, \eta$. Tal problema é facilmente solucionado pelos LMI solvers disponíveis. A formulação de estabilidade quadrática é muito exigente para o caso de análise de estabilidade robusta de SLIT. Como mencionada na introdução, várias formulações LMI mais complexas foram propostas buscando aumentar a taxa de sucesso para identificação de sistemas robustamente estáveis ao custo de um maior esforço computacional. Através de testes exaustivos, foi verificado que o método que combina formulação LMI com divisão de politopo é mais eficaz que as formulações LMI somente e ainda pode apresentar menor custo computacional que formulações LMI mais complexas (Gonçalves et al., 2006; Gonçalves et al., 2007). Esta metodologia está disponível para *download* no MATLAB® Central, File ID: #46647. Um bom compromisso entre eficiência e complexidade, para ser utilizado nessa metodologia, é a formulação LMI apresentada em (Peaucelle et al., 2000) (Teorema 4): o sistema (1) é robustamente estável se existe $P_i = P_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $P_i \succ 0$ e

$$\begin{bmatrix} A_i^T F^T + F A_i & P_i - F + A_i^T G \\ P_i - F^T + G^T A_i & -(G + G^T) \end{bmatrix} \prec 0, \quad (5)$$

para $i = 1, \dots, \eta$.

A única desvantagem do método de análise baseado na divisão do politopo é o rápido crescimento do custo computacional com o número de vertices do politopo, η , que define a dimensão do simplex. Desse modo, é interessante desenvolver uma nova metodologia para os casos em que o custo computacional passe a ser proibitivo. O problema de análise de estabilidade robusta do sistema politópico pode ser formulado como um problema de otimização em que é desejado determinar a maior parte real dos n autovalores das infinitas matrizes $A(\chi) \in \mathcal{A}$:

$$\chi^* = \arg \min_{\chi \in \Omega} f(\chi), \quad f(\chi) \triangleq -\max_i \Re(\lambda_i(A(\chi))) \quad (6)$$

sendo $\Re(\lambda)$ a parte real de $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\lambda_i(A)$ o conjunto dos autovalores de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Se $f(\chi) \leq 0$, isso significa que existe uma instância de $A(\chi)$ com autovalores no semi-plano direito do plano- S e o sistema não é robustamente estável. Caso contrário, existe uma grande probabilidade do sistema ser robustamente estável, mas não pode-se afirmar com absoluta certeza uma vez que trata-se de um problema de otimização não convexo, com mínimos em diferentes regiões de Ω , isto é, multimodal.

Algoritmos evolutivos, baseados em populações, possuem maior probabilidade de localizar o mínimo global de funções multimodais. Existem diferentes métodos de otimização evolutivo, entre eles o algoritmo genético, o algoritmo de evolução diferencial e o algoritmo de enxame de partículas. A opção nesse trabalho foi adotar o algoritmo de evolução diferencial com base em nossa experiência com esses três algoritmos. O algoritmo de evolução diferencial, descrito na seção seguinte, é de fácil implementação.

3 Algoritmo de Evolução Diferencial

O algoritmo de Evolução Diferencial (DE, do inglês *Differential Evolution*) é um algoritmo de otimização evolucionário para solução de problemas com funções com domínio real (Storn and Price, 1997; Das and Suganthan, 2011). O algoritmo DE inclui operadores similares aos empregados por algoritmos evolucionários padrões: mutação, cruzamento ou recombinação e seleção.

Seja $\mathcal{U}_{(a,b)}$ um número pseudo-aleatório com distribuição uniforme no intervalo (a, b) ; $\mathcal{I}_{(m)}$ um número pseudo-aleatório com distribuição uniforme no intervalo $[1, m]$; $\chi \in \mathbb{R}^\eta$ o vetor de variáveis de otimização; e N o número de indivíduos (soluções candidatas) da população, em geral $5\eta \leq N \leq 10\eta$. Defina a população na k -ésima iteração, $X_k = \{\chi_{k,i}; i = 1, \dots, N\}$, sendo a i -ésima solução:

$$\chi_{k,i} = \begin{bmatrix} \chi_{k,i,1} \\ \vdots \\ \chi_{k,i,\eta} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Os operadores do DE são descritos a seguir.

3.1 População Inicial

Neste trabalho foi adotado que a população inicial é composta pelos vértices, três pontos determinísticos sobre cada aresta e η soluções distribuídas de forma aleatória também sobre as arestas do polítopo Ω . Seja $I_i \in \mathbb{R}^\eta$ a i -ésima coluna da matriz identidade, a população inicial é criada pelo seguinte algoritmo:

```
para  $i \leftarrow 1$  até  $\eta$ 
   $\chi_{1,i} \leftarrow I_i$ 
fim para
```

```
 $i \leftarrow \eta$ 
para  $p \leftarrow 1$  até  $\eta - 1$ 
  para  $q \leftarrow p + 1$  até  $\eta$ 
     $\chi_{1,i+1} \leftarrow 0,25\chi_{1,p} + 0,75\chi_{1,q}$ 
     $\chi_{1,i+2} \leftarrow 0,5\chi_{1,p} + 0,5\chi_{1,q}$ 
     $\chi_{1,i+3} \leftarrow 0,75\chi_{1,p} + 0,25\chi_{1,q}$ 
     $i \leftarrow i + 3$ 
  fim para
fim para
para  $j \leftarrow 1$  até  $\eta$ 
   $r_1 \leftarrow \mathcal{I}_{(\eta)}$ 
  repita
     $r_2 \leftarrow \mathcal{I}_{(\eta)}$ 
  até  $r_1 \neq r_2$ 
   $\alpha \leftarrow \mathcal{U}_{(0,1)}$ 
   $i \leftarrow i + 1$ 
   $\chi_{1,i} \leftarrow \alpha\chi_{1,r_1} + (1 - \alpha)\chi_{1,r_2}$ 
fim para
```

O tamanho total da população é dado por $N = \eta + 3\eta(\eta - 1)/2 + \eta$.

3.2 Mutação diferencial

Sejam os índices $r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq i$ gerados como $r_j = \mathcal{I}_{(N)}$, $j = 1, \dots, 3$. Com bases em testes anteriores, testando as várias formas de implementação do operador de mutação, nesse trabalho foi adotado o operador no seu formato tradicional. A i -ésima solução mutante é obtida como sendo:

$$\mathbf{v}_{k,i} = \chi_{k,r_1} + F_i(\chi_{k,r_2} - \chi_{k,r_3}), \quad (8)$$

$i = 1, \dots, N$. Neste trabalho adotamos o fator de escala aleatório para cada mutação, sendo $F_i = \mathcal{U}_{(0,1)}$.

3.3 Cruzamento

O cruzamento é realizado entre a i -ésima solução da população atual, $\chi_{k,i}$, e da população mutante, $\mathbf{v}_{k,i}$, para gerar a i -ésima solução da população tentativa, $\mathbf{u}_{k,i}$:

$$u_{k,i,j} = \begin{cases} v_{k,i,j}, & \text{se } \mathcal{U}_{(0,1)} \leq C_r \text{ ou } j = \delta_i \\ \chi_{k,i,j}, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (9)$$

para $j = 1, \dots, \eta$, $i = 1, \dots, N$, sendo $C_r \in [0, 1]$ a taxa de cruzamento. Neste trabalho, foi adotado $C_r = 0,9$. O índice $\delta_i = \mathcal{I}_{(\eta)}$ garante que $\mathbf{u}_{k,i} \neq \chi_{k,i}$.

3.4 Tratamento das restrições

No problema (6), uma solução é factível se $\chi_{k,i} \in \Omega$, isto é, $\chi_{k,i,j} \geq 0$, $\forall j$, e $\sum_{j=1}^{\eta} \chi_{k,i,j} = 1$. Neste trabalho, optamos por forçar que toda solução atenda as restrições para evitar o uso de tratamento de restrição pelo método de penalidades. Para isso aplicamos as seguintes operações sobre as soluções tentativa obtidas pela operação de mutação e cruzamento:

$$\begin{aligned} u_{k,i,j} &= |u_{k,i,j}|, & j &= 1, \dots, \eta; \\ \mathbf{u}_{k,i} &= \mathbf{u}_{k,i} / \|\mathbf{u}_{k,i}\|_1, & i &= 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (10)$$

A primeira operação garante que $u_{k,i,j} > 0$ e a segunda que $\sum_{j=1}^{\eta} u_{k,i,j} = 1$.

3.5 Seleção

A operação de seleção determina qual solução, se o alvo, $\chi_{k,i}$, ou a tentativa, $\mathbf{u}_{k,i}$, sobrevive para próxima geração:

$$\chi_{k+1,i} = \begin{cases} \mathbf{u}_{k,i}, & \text{se } f(\mathbf{u}_{k,i}) \leq f(\chi_{k,i}) \\ \chi_{k,i}, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (11)$$

$i = 1, \dots, N$.

3.6 Critério de parada

Nós escolhemos como critérios de parada o número máximo de gerações, N_g , ou a convergência da população comparando os valores máximos e mínimos de $f(\chi)$ da k -ésima população, $f_{\max}(\chi) - f_{\min}(\chi) \leq \epsilon$, $\chi \in \mathbf{X}_k$. Nesse trabalho adotamos $N_g = 200\eta$ e $\epsilon = 10^{-8}$. Para reduzir o custo computacional, se $f(\chi) \leq 0$ então o critério de parada é modificado de $\epsilon = 10^{-8}$ para $\epsilon = 0,1$, uma vez que já foi identificado que o sistema não   robustamente estável.

3.7 Algoritmo de evolução diferencial

Dados o tamanho da população, N , a taxa de cruzamento, C_r , os valores limites dos fatores de escala, F_l e F_u , tal que $F_i = \mathcal{U}_{(F_l, F_u)}$, o número máximo de iterações, N_g , e o critério de parada, ϵ , o algoritmo de evolução diferencial pode ser formulado como:

```

k ← 1
Xk ← Cria_Popula  o_Inicial(N)
Fx ← f(Xk)
enquanto não critério de parada
    Vk ← Muta  o_Diferencial
    Uk ← Cruzamento
    Uk ← Tratamento_Restri  es
    Fu ← f(Uk)
    Xk+1 ← Seleção
    k ← k + 1
fim enquanto

```

4 Testes exaustivos

Para avaliação do método de análise de estabilidade robusta baseado no algoritmo DE, foram realizados dois testes exaustivos. No primeiro teste, foram gerados 100 sistemas aleatórios para valores combinados de $n \in \{2, 4, 8\}$ e $\eta \in \{2, 4, 8\}$. As matrizes $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, \eta$, foram criadas com elementos aleatórios, com distribuição Gaussiana, com média zero e desvio padrão unitário. Para garantir uma distribuição aproximada entre sistemas robustamente estáveis ou não, foram calculados os autovalores para cada v rtice do politopo, sendo cada matriz recalculada como:

$$A_i = A_i - (\sigma_{m,i} + \mathcal{U}_{(0,d)})I, \quad i = 1, \dots, \eta, \quad (12)$$

Tabela 1: Resultados do teste 1

n, η	$P_s(\%)$	$T_{DE}(s)$	$T_{BB}(s)$	N_e
2,2	100	2,0454	1,0670	56
2,4	100	8,1663	1,9870	51
2,8	100	66,8466	20,8050	53
4,2	100	2,5055	1,9790	57
4,4	100	9,1573	5,8400	48
4,8	100	84,0276	103,4540	54
8,2	100	3,9225	18,2340	73
8,4	100	11,5950	33,4600	54
8,8	100	89,6515	746,4330	54

sendo $\sigma_{m,i}$ o valor máximo da parte real dos autovalores, I a matriz identidade de ordem compatível e d um parâmetro ajustado de acordo com η : $d = 10^{-3}$ para $\eta = 2$, $d = 0,5$ para $\eta = 4$ e $d = 1$ para $\eta = 8$. O método de análise baseado no DE foi executado 10 vezes para cada sistema politópico. Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 1, sendo P_s o percentual de sucesso, T_{DE} o tempo computacional total médio das 10 análises pelo método DE, T_{BB} o tempo computacional total da análise pelo método LMI/divisão e N_e o número de sistemas estáveis em 100. Foi utilizado um computador com processador Intel® Core™ i7-3630QM 2,40GHz. Para essa amostra de 9.000 sistemas politópicos, o método DE chegou ao mesmo resultado de análise do que o método LMI/divisão em todos os casos. Para valores menores de n e η , o método DE apresenta maior custo computacional, mas essa situação muda com o aumento de n ou de η . O método DE apresenta maior custo computacional ao analisar sistemas robustamente estáveis. Isso se deve ao fato de que, não se encontrando um sistema instável, o critério de parada permanece sempre no valor menor de 10^{-8} , o que requer maior número de iterações para convergência. Quando o sistema não   robustamente estável, o número de iterações para convergência é muito menor. No teste realizado para $n = 8$ e $\eta = 8$, o número de iterações para convergir variou entre 22 e 232 no caso de sistemas instáveis. No caso de sistemas estáveis, em alguns casos a parada do algoritmo ocorreu por atingir o número máximo de iterações, $N_g = 200\eta$, sendo $N_g = 1.600$ no caso de $\eta = 8$.

No segundo teste, foram gerados 100 sistemas aleatórios, instáveis, para cada valores combinados de $n \in \{2, 4, 8\}$ e $\eta \in \{2, 4, 8\}$. Para um teste ainda mais rigoroso da eficiência do método DE, foram calculados os autovalores nos vértices e nos três pontos sobre cada aresta do politopo (mesmos pontos incluídos na população inicial do algoritmo DE). Seja σ_m o valor máximo da parte real de todos os autovalores calculados. Todas as matrizes dos vértices do politopo foram recalculadas como:

$$A_i = A_i - (\sigma_m + 0,01\mathcal{U}_{(0,1)})I, \quad i = 1, \dots, \eta, \quad (13)$$

Desse modo, é garantido que todos os vértices e

Tabela 2: Resultados do teste 2

n, η	$P_s(\%)$	$T_{DE}(s)$	$T_{BB}(s)$
2,2	100	0,37	3,99
2,4	100	2,83	18,32
2,8	99,6	24,39	521,64
4,2	100	0,45	7,01
4,4	99,8	3,39	25,97
4,8	99,7	27,14	630,76
8,2	100	0,56	74,17
8,4	100	4,53	170,16
8,8	99,0	34,46	3.050,40

os três pontos sobre cada aresta do politopo são sistemas estáveis. O sistema politópico resultante é analisado com o método LMI/divisão. Se é verificado que o sistema é robustamente estável, o mesmo é descartado. O objetivo dessa metodologia de geração dos sistemas, que não são robustamente estáveis, é evitar que o método DE não tenha sucesso apenas pela forma que foi gerada a população inicial, mas sim pelo seu mecanismo de otimização.

O método DE foi executado 10 vezes para cada sistema. A versão apresentada da implementação e a configuração dos parâmetros resultaram em uma alta taxa de sucesso com apenas 19 falhas em 9.000 testes. A Tabela 2 lista o percentual de sucesso, P_s , e o tempo computacional total médio das 10 análises pelo método DE e o tempo computacional total da análise pelo método LMI/divisão, para cada par n e η . Pode ser observado que o método DE requer tempo computacional muito menor do que o método LMI/divisão em todos os casos. Como comentado anteriormente, o método DE finaliza mais rápido quando lidando com sistemas instáveis. Porém, diferente do LMI/divisão, determinístico, o método DE, estocástico, não tem garantia de localização de uma instância de sistema instável no politopo. Quando $f(\chi) > 0$, existe uma alta probabilidade do sistema ser robustamente estável.

Para demonstrar a dificuldade de se localizar um sistema instável no politopo, foi selecionado um sistema com $n = 8$ e $\eta = 8$ com uma região de sistemas instáveis bastante difícil de ser localizada. Para uma nuvem de polos para 100.000 sistemas aleatórios, não é observado nenhum polo com parte real maior que -0.5 . A Fig. 1 mostra a superfície de $\max_i \mathcal{R}(\lambda_i(A(\chi)))$ em função de χ_2 e χ_6 , para 100×100 valores distribuídos uniformemente. A Fig. 2 mostra as curvas de nível correspondente à Fig. 1. É observado que existe região muito pequena próxima a uma aresta de Ω em que os sistemas são instáveis. Nota-se que $f(\chi)$ é não diferenciável, não convexa e multimodal, o que dificulta o uso de técnicas de otimização de menor custo computacional.

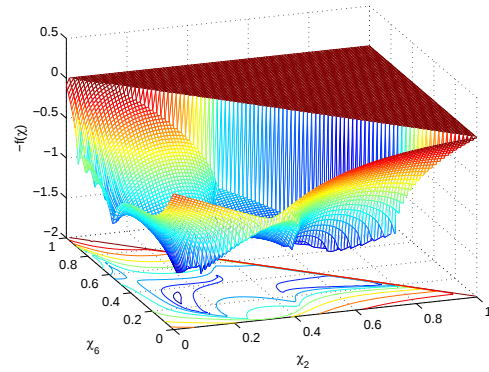


Figura 1: Superfície de $\max_i \mathcal{R}(\lambda_i(A(\chi)))$, em função de χ_2 e χ_6 , para um modelo com $\eta = 8$.

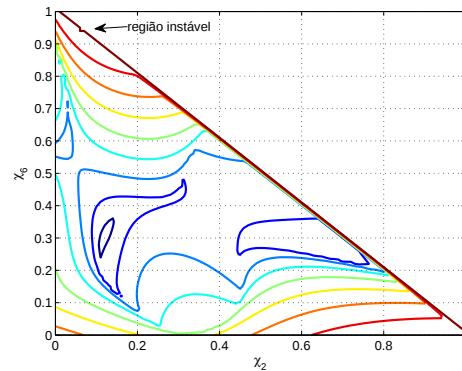


Figura 2: Regiões de nível de $\max_i \mathcal{R}(\lambda_i(A(\chi)))$, em função de χ_2 e χ_6 , para um modelo com $\eta = 8$.

5 Conclusões

Foi proposto um novo método de análise de estabilidade robusta de sistemas lineares invariantes no tempo baseado no algoritmo de evolução diferencial. Quando o custo computacional é aceitável, o método que combina formulações LMI com divisão de politopo é o mais indicado para a análise de estabilidade robusta de SLIT com modelo politópico por ser uma técnica que identifica de forma determinística se o sistema é robustamente estável ou não. No caso do método DE, se não for localizado uma instância de sistema instável, não se pode afirmar com absoluta certeza que o sistema é robustamente estável. Apesar disso, o método DE obteve um percentual de sucesso em mais de 99% dos 18.000 testes realizados. Quando o método LMI/divisão se tornar proibitivo computacionalmente, o método DE é uma alternativa a ser considerada admitindo-se o pequeno risco. Outra vantagem do método DE é a maior simplicidade de implementação em relação ao método LMI/divisão. Além de mostrar a viabilidade do método DE para análise de estabilidade robusta de sistemas politópicos, uma outra contribuição desse estudo é apresentar uma implementação e

uma configuração de parâmetros eficiente para o algoritmo DE tratar esse problema específico. O método proposto pode ser facilmente adaptado para análise de estabilidade robusta de SLIT discretos no tempo ou análise de $\mathcal{D}$ -estabilidade robusta.

Agradecimentos

Os autores agradecem os apoios das agências CAPES, CNPq, [306005/2012-3] - Produtividade em Pesquisa - PQ - 2012, e FAPEMIG, [APQ-02943-15] - Edital 01/2015 - Demanda Universal.

Referências

- Bliman, P.-A. (2004). A convex approach to robust stability for linear systems with uncertain scalar parameters, *SIAM Journal on Control & Optimization* **42**(6): 2016–2042.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, SIAM, Philadelphia, PA.
- Calafiore, G. C., Dabbeneb, F. and Tempo, R. (2011). Research on probabilistic methods for control system design, *Automatica* **47**(7): 1279–1293.
- Chesi, G. (2008). On the non-conservatism of a novel LMI relaxation for robust analysis of polytopic systems, *Automatica* **44**(11): 2973–2976.
- Chesi, G. (2010). Time-invariant uncertain systems: A necessary and sufficient condition for stability and instability via homogeneous parameter-dependent quadratic Lyapunov functions, *Automatica* **46**(2): 471–474.
- Chesi, G., Garulli, A., Tesi, A. and Vicino, A. (2005). Polynomially parameter-dependent lyapunov functions for robust stability of polytopic systems: An LMI approach, *IEEE Transactions on Automatic Control* **50**(3): 365–370.
- Chilali, M. and Gahinet, P. (1996). $\mathcal{H}_\infty$ design with pole placement constraints: An LMI approach, *IEEE Transactions on Automatic Control* **41**(3): 358–367.
- Das, S. and Suganthan, P. N. (2011). Differential evolution: A survey of the state-of-the-art, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* **15**(1): 4–31.
- Gonçalves, E. N., Palhares, R. M., Takahashi, R. H. C. and Mesquita, R. C. (2006). New approach to robust $\mathcal{D}$ -stability analysis of linear time-invariant systems with polytope-bounded uncertainty, *IEEE Transactions on Automatic Control* **51**(10): 1709–1714.
- Gonçalves, E. N., Palhares, R. M., Takahashi, R. H. C. and Mesquita, R. C. (2007). New strategy for robust stability analysis of discrete-time uncertain systems, *Systems & Control Letters* **56**: 516–524.
- Henrion, D., Arzelier, D., Peaucelle, D. and Lasserre, J.-B. (2004). On parameter-dependent Lyapunov functions for robust stability of linear systems, *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control*, IEEE, Atlantis, Paradise Island, Bahamas, pp. 887–892.
- Leite, V. J. S. and Peres, P. L. D. (2003). An improved LMI condition for robust $\mathcal{D}$ -stability of uncertain polytopic systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **48**(3): 500–504.
- Oliveira, R. C. L. F. and Peres, P. L. D. (2005). Stability of polytopes of matrices via affine parameter-dependent Lyapunov functions: Asymptotically exact LMI conditions, *Linear Algebra and its Applications* **405**: 209–228.
- Oliveira, R. C. L. F. and Peres, P. L. D. (2006). LMI conditions for robust stability analysis based on polynomially parameter-dependent lyapunov functions, *Systems & Control Letters* **55**(1): 52–61.
- Peaucelle, D., Arzelier, D., Bachelier, O. and Bernussou, J. (2000). A new robust $\mathcal{D}$ -stability condition for real convex polytopic uncertainty, *Systems & Control Letters* **40**: 21–30.
- Ramos, D. C. W. and Peres, P. L. D. (2002). An LMI condition for the robust stability of uncertain continuous-time linear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **47**(4): 675–678.
- Storn, R. and Price, K. (1997). Differential evolution - a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces, *Journal of Global Optimization* **11**(4): 341–359.
- Tempo, R., Bai, E. and Dabbene, F. (1997). Probabilistic robustness analysis: Explicit bounds for the minimum number of samples, *Systems & Control Letters* **30**(5): 237–242.
- Ugrinovskii, V., Tempob, R. and Fujisakic, Y. (2004). A primal-dual probabilistic setting for quadratic stability of uncertain systems, *Systems & Control Letters* **52**(1): 39–48.