

CONTROLE MISTO $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ PARA SISTEMAS LINEARES COM SALTOS MARKOVIANOS COM CADEIA OCULTA

A. M. DE OLIVEIRA*, O. L. V. COSTA*

*Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
CEP: 05508 900-São Paulo, Brasil

Emails: amarcorin@gmail.com, oswaldo@lac.usp.br

Abstract— In the present work, we study the mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control for Markov Jump Linear Systems through the Hidden Markov Model approach. It is considered that the Markov parameter $\theta(k)$ is not available, but instead an estimation $\hat{\theta}(k)$ is given by a detector. Conditions for the synthesis of controllers $\hat{\theta}(k)$ -dependents that stochastically stabilize the system while providing upper bounds for the $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ norms are given in terms of linear matrix inequalities. The results are illustrated by a numerical example.

Keywords— Markov jump linear systems, hidden Markov models, mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control, linear matrix inequalities.

Resumo— No presente trabalho, estudamos o controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ para sistemas lineares com saltos markovianos a tempo discreto com a cadeia de Markov oculta. É considerado que o modo da cadeia $\theta(k)$ não está disponível para o controle, mas sim uma estimativa $\hat{\theta}(k)$ fornecida por um detector. Resultados para a síntese de controladores dependentes de $\hat{\theta}(k)$ que estabilizam estocasticamente o sistema e fornecem limitantes superiores para as normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ são desenvolvidos em termos de desigualdades matriciais lineares e ilustrados por um exemplo numérico.

Palavras-chave— Sistemas lineares com saltos markovianos, modelo oculto de Markov, controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, desigualdades matriciais lineares.

1 Introdução

O controle de sistemas sujeitos a variações estocásticas em sua estrutura vem atualmente recebendo espaço respeitável na literatura. De especial interesse são os sistemas lineares com saltos markovianos, do inglês, *Markov Jump Linear System (MJLS)*, cujos aspectos teóricos foram bem estabelecidos e estudados na literatura como, por exemplo, no livro (Costa et al., 2005). Para problemas envolvendo MJLS, um aspecto fundamental é a disponibilidade do modo da cadeia de Markov, $\theta(k)$: são habitualmente encontrados nos trabalhos em MJLS os casos dependentes do modo, onde $\theta(k)$ está disponível para controladores ou filtros; de agrupamentos dos modos da cadeia (*clusters*); e independentes do modo, onde nenhuma informação sobre a cadeia é instantaneamente conhecida. Especialmente em relação ao controle MJLS, podem ser citados alguns exemplos em termos dessa divisão: para a realimentação de estado, tem-se o controle $\mathcal{H}_2$ com observação em *clusters* (Do Val et al., 2002), bem como o controle $\mathcal{H}_\infty$ dependente do modo e utilizando *clusters* (Gonçalves et al., 2012). Controladores dinâmicos de saída $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ dependentes do modo podem ser encontrados em (Geromel et al., 2009). Mais recentemente, foi introduzido o controle MJLS para cadeias de Markov ocultas, no qual é considerado que $\theta(k)$ não está disponível para o controlador, porém um detector emite estimativas do modo atual da cadeia, $\hat{\theta}(k)$. Nesse contexto, podem ser citados (Costa et al., 2015) e

(Todorov et al., 2015) para os controles $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação de estado.

Em relação ao problema de controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ em MJLS, podem ser citados (Costa and Marques, 1998) para o caso a tempo discreto, e (Mahmoud et al., 2008) a tempo contínuo com atraso, ambos dependentes do modo. Nesse tipo de problema, deseja-se obter um controlador que permita ao sistema respeitar um limitante de robustez, no caso, a norma $\mathcal{H}_\infty$, enquanto um critério quadrático de interesse é otimizado (norma $\mathcal{H}_2$). É interessante notar que não existem resultados na literatura para o controle $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ para MJLS com parâmetros que não dependem de $\theta(k)$, pelo conhecimento dos autores. Tendo em vista esse fato, o presente trabalho visa fornecer resultados em controle $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ para MJLS a tempo discreto considerando que a cadeia de Markov é oculta. Dessa forma, no contexto da disponibilidade parcial do modo da cadeia, são derivadas condições para o projeto de controladores dependentes do modo estimado $\hat{\theta}(k)$, que estabilizam estocasticamente o sistema de interesse e que minimizam um limitante superior da norma $\mathcal{H}_2$, enquanto mantém a norma $\mathcal{H}_\infty$ abaixo de um limite especificado. Essa abordagem é atraente na medida em que permite a síntese de controladores que dependem somente do sinal do detector, visto que o modo da cadeia muitas vezes não está disponível para a aplicação, por exemplo, veja em (Gonçalves et al., 2012). Os resultados obtidos generalizam as condições de (Costa and Marques, 1998) e podem ser vistos como duais aos resultados de (Geromel

et al., 1995), para o caso determinístico. Da mesma forma como em (Costa and Marques, 1998) e (Geromel et al., 1995), apresentamos uma versão aproximada do controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$.

Esse trabalho é dividido conforme segue. Na Seção 2 é estabelecida a notação utilizada. Na Seção 3 são realizadas as análises preliminares, onde o sistema de interesse é apresentado, assim como o estimador da cadeia de Markov, a definição de estabilidade estocástica e alguns resultados auxiliares. Ainda na Seção 3, na Subseção 3.2 são definidos os conceitos de norma $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ para MJLS, necessários para derivar os resultados principais mostrados na Seção 4. Nessa seção, são fornecidos dois teoremas: o primeiro apresenta uma condição matricial não-linear para o controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, e o segundo, condições suficientes em desigualdades matriciais lineares para a síntese de controladores $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ dependentes de $\hat{\theta}(k)$. Na Seção 5, um exemplo numérico é fornecido para ilustrar os resultados da Seção 4. O trabalho é concluído na Seção 6.

2 Notação

A notação utilizada é usual. Vetores reais e complexos são representados por $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{R}^n$, respectivamente. Os espaços de matrizes reais e complexas limitadas $m \times n$ são denotados por $\mathbb{B}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ e $\mathbb{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, respectivamente e, para matrizes quadradas, $\mathbb{B}(\mathbb{C}^n) \doteq \mathbb{B}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ e $\mathbb{B}(\mathbb{R}^n) \doteq \mathbb{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. O símbolo $(\cdot)'$ representa a operação de transposição e o operador traço, por $\text{Tr}(\cdot)$. Matrizes em bloco diagonal são denotadas por **diag**($\cdot$). O conjunto $\mathbb{H}^{n,m}$ representa o espaço linear de todas as seqüências de N matrizes complexas $V = \{V_1, V_2, \dots, V_N\}$, $V_i \in \mathbb{B}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$, para um N inteiro. Por simplicidade, $\mathbb{H}^{n,n} \doteq \mathbb{H}^n$ e $\mathbb{H}^n \doteq \mathbb{H}^{n,n}$ e $\mathbb{H}^{n+} \doteq \{V \in \mathbb{H}^n; V_i \geq 0, i = 1, \dots, N\}$. Para $P, V \in \mathbb{H}^{n+}$, adota-se a notação $P \geq (>)V$ se $P_i \geq (>)V_i$ para todo $i = 1, \dots, N$. Um operador $T \in \mathbb{B}(\mathbb{H}^n)$ é dito positivo se $T(V) \in \mathbb{B}(\mathbb{H}^{n+})$ sempre que $V \in \mathbb{B}(\mathbb{H}^{n+})$. Em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{P}, \mathcal{F})$, $\mathbf{E}(\cdot)$ representa o operador esperança matemática e $\mathbf{E}(\cdot | \cdot)$, o operador esperança condicional. Representamos por $l_2^r(\mathcal{F})$ o espaço de todos os sinais discretos dos processos adaptados $\mathcal{F}_k$ no espaço de probabilidade considerado tal que $\|w\|_2 = \{\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}(\|w(k)\|^2)\}^{1/2} < \infty$.

3 Análises preliminares

3.1 Definições básicas

No espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{P}, \mathcal{F})$, considere o seguinte MJLS:

$$\mathcal{G} : \begin{cases} x(k+1) &= A_{\theta(k)}x(k) + B_{\theta(k)}u(k) + Jw(k), \\ z(k) &= C_{\theta(k)}x(k) + D_{\theta(k)}u(k), \\ x(0) &= x_0, \theta(0) = \theta_0, \end{cases} \quad (1)$$

onde $x(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ é a variável de estado, $u(\cdot) \in \mathbb{R}^m$ é a entrada de controle, $w(\cdot) \in \mathbb{R}^r$ é a entrada exógena e $z(\cdot) \in \mathbb{R}^p$ é a saída controlada. O parâmetro $\theta(k)$ é uma cadeia de Markov cujos valores estão no conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, N\}$ com matriz de transição de probabilidade $\mathbb{P} = [p_{ij}]$ e distribuição de probabilidade inicial $P(\theta_0 = i) = \mu_i, i \in \mathbb{N}$.

Consideramos, de forma similar à introduzida em (Costa et al., 2015), que o parâmetro $\theta(k)$ não é diretamente observado. Em seu lugar, um sinal $\hat{\theta}(k)$ é emitido sempre que ocorre uma transição em $\theta(k)$. Dessa forma, o sinal $\hat{\theta}(k)$, que pode ser entendido como um detector de $\theta(k)$, assume valores dentro de um conjunto $\mathbb{M}_{\theta(k)=i}$, onde $\mathbb{M}_i \subseteq \mathbb{M}$, $\mathbb{M} = \{1, 2, \dots, M\}$ para M inteiro. Considere assim a σ -álgebra $\hat{\mathcal{F}}_k$ que consiste do conjunto gerado por $\{x(0), \theta(0), \hat{\theta}(0), w(0); \dots; x(k), \theta(k), w(k)\}$ (o parâmetro $\hat{\theta}(k)$ não está em $\hat{\mathcal{F}}_k$). Os valores de $\hat{\theta}(k)$ e $\theta(k)$ são relacionados por

$$P(\hat{\theta}(k) = l | \hat{\mathcal{F}}_k) = P(\hat{\theta}(k) = l | \theta(k)) = \alpha_{\theta(k)l},$$

para $l \in \mathbb{M}_{\theta(k)}$ e $\sum_{l=1}^M \alpha_{il} = 1$. Além disso, o conjunto $\mathbb{M}_i$ pode ser descrito por $\mathbb{M}_i = \{l \in \mathbb{M}; \alpha_{il} > 0\}, \bigcup_{i=1}^N \mathbb{M}_i = \mathbb{M}$.

Observação 1 Em (Costa et al., 2015), é mostrado que a abordagem do detector utilizada nesse trabalho é uma generalização dos casos dependente do modo $\hat{\theta}(k) \equiv \theta(k)$; do caso de observações em cluster $M < N$; e independente do modo $M = 1$.

São considerados controladores por realimentação de estado, definidos por

$$u(k) = K_{\hat{\theta}(k)}x(k), \quad (2)$$

ou seja, o controlador depende do estado estimado $\hat{\theta}(k)$. O conjunto de todos os ganhos do controlador em (2) é denotado por $\mathcal{K} \doteq \{K = \{K_1, \dots, K_M\}, K_l \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), l \in \mathbb{M}\}$.

Conectando o sistema (1) ao controlador (2), é obtido o seguinte sistema em malha fechada,

$$\mathcal{G}_f : \begin{cases} x(k+1) &= A_{\theta(k)\hat{\theta}(k)}x(k) + Jw(k), \\ z(k) &= C_{\theta(k)\hat{\theta}(k)}x(k), \\ x(0) &= x_0, \theta(0) = \theta_0, \end{cases} \quad (3)$$

onde, para $i \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{M}_i$,

$$A_{il} \doteq A_i + B_i K_l, \quad (4)$$

$$C_{il} \doteq C_i + D_i K_l. \quad (5)$$

Defina, para $i, j \in \mathbb{N}$, $V = \{V_1, V_2, \dots, V_N\} \in \mathbb{H}^n$, os seguintes operadores:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i(V) &\doteq \sum_{j=1}^N p_{ij} V_j, \\ \mathcal{L}_i(V) &\doteq \sum_{l \in \mathbb{M}_i} \alpha_{il} A'_{il} \mathcal{E}_i(V) A_{il}, \end{aligned}$$

onde $\mathcal{E}, \mathcal{L} \in \mathbb{B}(\mathbb{H}^n)$.

Considere o sistema em (3) com $w(k) \equiv 0$. A próxima definição, retirada de (Todorov et al., 2015), estabelece o conceito de estabilidade estocástica.

Definição 1 (Estabilidade estocástica) *O sistema em (3) é dito ser estocasticamente estável se, para toda condição inicial com segundo momento finito x_0 e toda condição inicial da cadeia θ_0 ,*

$$\|x\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}(\|x(k)\|_2^2) < \infty. \quad (6)$$

O próximo lema, derivado em (Costa et al., 2015), apresenta condições necessárias e suficientes para a estabilidade estocástica de (3).

Lema 1 *As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) *O sistema (3) é estocasticamente estável.*
- (ii) *Existe $K \in \mathcal{K}$ e $P \in \mathbb{H}^n$, $P > 0$, tal que $P - \mathcal{L}(P) > 0$.*

Prova: Ver (Costa et al., 2015). $\square$

Observação 2 *Seja $T \in \mathbb{B}(\mathbb{H}^n)$ um operador linear positivo tal que $r_\sigma(T) < 1$, onde $r_\sigma(\cdot)$ é o raio espectral do operador. Se $P, S \in \mathbb{H}^n$ são as respectivas soluções de $P - T(P) = Q$, $S - T(S) = V$, com $Q, V \in \mathbb{H}^n$ que satisfazem $Q \geq V$, então $(P - S) - T(P - S) = Q - V$ de forma que $P - S = \sum_{k=0}^{\infty} T^k(Q - V) \geq 0$, então $P \geq S$.*

Prova: Ver (Costa et al., 2005). $\square$

3.2 As normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$

Considere que o sistema (3) é estocasticamente estável para um dado $K \in \mathcal{K}$. A próxima definição estabelece o conceito da norma $\mathcal{H}_2$.

Definição 2 (Norma $\mathcal{H}_2$) *Seja $v_s \in \mathbb{R}^r$ o vetor formado por zeros, exceto na s -ésima posição, que é igual a 1. Defina como $z_s(k)$, a saída controlada $z(k)$ em (3) para $x_0 = 0$, $\mu_i = P(\theta_0 = i)$, $i \in \mathbb{N}$ e a entrada exógena $w(k)$ definida por*

$$w(k) = \begin{cases} v_s & k = 0, \\ 0 & k > 0. \end{cases}$$

A norma $\mathcal{H}_2$ de (3) é definida por

$$\|\mathcal{G}_f\|_2^2 \doteq \sum_{s=1}^r \|z_s\|_2^2, \quad \|z_s\|_2^2 \doteq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}(\|z_s(k)\|^2).$$

Considere o conjunto $P \in \mathbb{H}^{n+}$, a solução única de

$$P = \mathcal{L}(P) + \mathbf{C}, \quad (7)$$

conhecido como o gramiano de observabilidade, onde $\mathbf{C} = \{\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots, \mathbf{C}_N\} \in \mathbb{H}^{n+}$ é dado por

$$\mathbf{C}_i \doteq \sum_{l \in \mathbb{M}_i} \alpha_{il} C'_{il} C_{il}.$$

Para o cômputo da norma $\mathcal{H}_2$, apresenta-se a seguinte proposição.

Proposição 1 *A norma $\mathcal{H}_2$ de (3) é dada por*

$$\|\mathcal{G}_f\|_2^2 = \sum_{i=1}^N \mu_i \text{Tr}(J' \mathcal{E}_i(P) J), \quad (8)$$

onde P é a solução da Equação (7).

Prova: Ver (Costa et al., 2015), para $J_i = J, i \in \mathbb{N}$. $\square$

Considere agora que o sistema é sujeito a uma perturbação estocástica exógena $w(\cdot) = \{w(k), k \geq 0 : w(k) \in l_2^r(\mathcal{F})\}$. A norma $\mathcal{H}_\infty$ de (3) é estabelecida na próxima definição, retirada de (Costa and Marques, 1998).

Definição 3 (Norma $\mathcal{H}_\infty$) *Considere que o sistema (3) é estocasticamente estável. A norma $\mathcal{H}_\infty$ de (3) é definida como*

$$\|\mathcal{G}_f\|_\infty^2 \doteq \sup_{\theta_0, w \in l_2^r(\mathcal{F})} \frac{\|z\|_2^2}{\|w\|_2^2}. \quad (9)$$

Assim, o objetivo principal do presente trabalho é encontrar um conjunto de controladores admissíveis em $\mathcal{K}$ de forma que o sistema (3) seja estocasticamente estável e respeite limitantes superiores dos critérios de desempenho $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$. Pode-se então escrever o problema de otimização de interesse:

$$\min_{K \in \mathcal{K}} \{ \|\mathcal{G}_f\|_2^2; \text{ sujeito a } \|\mathcal{G}_f\|_\infty^2 < \delta^2 \}. \quad (10)$$

4 Resultados

O próximo teorema, baseado no resultado obtido em (Costa and Marques, 1998), estabelece condições suficientes para a obtenção de um conjunto $K \in \mathcal{K}$ de ganhos do controlador (2) que estabiliza estocasticamente o sistema (3) e, além disso, fornece limitantes superiores para as normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ de (3).

Teorema 1 *Se existe um conjunto de matrizes $P \in \mathbb{H}^n$, $P > 0$, e $K \in \mathcal{K}$, para uma constante real $\delta > 0$, que satisfaz as seguintes desigualdades, para $i \in \mathbb{N}$,*

$$P_i - \sum_{l \in \mathbb{M}_i} \alpha_{il} (A'_{il} \mathcal{E}_i\{P\} A_{il} + C'_{il} C_{il}) - \frac{1}{\delta^2} P_i J J' P_i > 0, \quad (11)$$

para A_{il} e C_{il} definidos em (4) e (5), respectivamente, então

$$\|\mathcal{G}_f\|_\infty^2 < \delta^2, \quad (12)$$

e

$$\|\mathcal{G}_f\|_2^2 \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_i \text{Tr}(J' \mathcal{E}_i(P) J). \quad (13)$$

Prova: A prova é similar à prova do Teorema 1 de (Costa and Marques, 1998). Considere a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}(x(k+1)' P_{\theta(k+1)} x(k+1)) \\ &= \mathbf{E}(x(k+1)' \mathbf{E}(P_{\theta(k+1)} | \mathcal{F}_k) x(k+1)). \end{aligned} \quad (14)$$

Por outro lado, pode ser verificado que, para uma matriz $\Xi_{\theta(k)\hat{\theta}(k)} \in \mathbb{H}^n$, $\mathbf{E}(\Xi_{\theta(k)\hat{\theta}(k)} | \hat{\mathcal{F}}_k) = \sum_{l \in \mathbb{M}_{\theta(k)}} \alpha_{\theta(k)l} \Xi_{\theta(k)l}$. Assim, a Equação (11) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}(A'_{\theta(k)\hat{\theta}(k)} \mathcal{E}_i\{P\} A_{\theta(k)\hat{\theta}(k)} | \hat{\mathcal{F}}_k) < P_{\theta(k)} - \\ & \mathbf{E}(C'_{\theta(k)\hat{\theta}(k)} C_{\theta(k)\hat{\theta}(k)} | \hat{\mathcal{F}}_k) - \frac{1}{\delta^2} P_{\theta(k)} J J' P_{\theta(k)}. \end{aligned}$$

Portanto, a Equação (14), considerando o sistema em (3) e a Equação (11), pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}(x(k+1)' P_{\theta(k+1)} x(k+1)) \\ & < \mathbf{E}(x(k)' (\Phi_{\theta(k), \hat{\theta}(k)})) x(k)) \\ & + 2\mathbf{E}(w(k)' J' \mathcal{E}_{\theta(k)}\{P\} A_{\theta(k)\hat{\theta}(k)} x(k)) \\ & + \mathbf{E}(w(k)' J' \mathcal{E}_{\theta(k)}\{P\} J w(k)), \end{aligned}$$

onde $\Phi_{\theta(k), \hat{\theta}(k)} = P_{\theta(k)} - C'_{\theta(k)\hat{\theta}(k)} C_{\theta(k)\hat{\theta}(k)} - \frac{1}{\delta^2} P_{\theta(k)} J J' P_{\theta(k)}$. O resultado acima pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} & \|P_{\theta(k+1)}^{\frac{1}{2}} x(k+1)\|_2^2 - \|P_{\theta(k)}^{\frac{1}{2}} x(k)\|_2^2 + \|z(k)\|_2^2 \\ & + \frac{1}{\delta^2} \|J' P_{\theta(k)} x(k)\|_2^2 < \mathbf{E}(w(k)' J' \mathcal{E}_{\theta(k)}\{P\} J w(k)) \\ & + 2\mathbf{E}(w(k)' J' \mathcal{E}_{\theta(k)}\{P\} A_{\theta(k)\hat{\theta}(k)} x(k)). \end{aligned}$$

Pode-se subtrair da desigualdade acima, o termo $\frac{1}{\delta^2} \|J' P_{\theta(k+1)} x(k+1)\|_2^2$ e completar o quadrado entre $\frac{1}{\delta} \mathbf{E}(J' \mathcal{E}_{\theta(k)}(P) x(k+1))$ e $-\delta \mathbf{E}(w(k))$. O resultado é

$$\begin{aligned} & \|P_{\theta(k+1)}^{\frac{1}{2}} x(k+1)\|_2^2 - \|P_{\theta(k)}^{\frac{1}{2}} x(k)\|_2^2 + \|z(k)\|_2^2 \\ & + \frac{1}{\delta^2} \|J' P_{\theta(k)} x(k)\|_2^2 - \frac{1}{\delta^2} \|J' P_{\theta(k+1)} x(k+1)\|_2^2 \\ & < - \left\| \frac{1}{\delta} J' P_{\theta(k+1)} x(k+1) - \delta w(k) \right\|_2^2 \\ & + \mathbf{E}(w(k)' (\delta^2 I - J' \mathcal{E}_{\theta(k)}\{P\} J) w(k)), \\ & < \mathbf{E}(w(k)' (\delta^2 I - J' \mathcal{E}_{\theta(k)}\{P\} J) w(k)). \end{aligned}$$

Some o resultado para todo $k \in [0, \infty)$, considerando que $x(k) \rightarrow 0$ para $k \rightarrow \infty$. Assim,

$$\begin{aligned} & \|z\|_2^2 \leq \\ & \delta^2 \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E} \left(w(k)' \left(I - \frac{1}{\delta^2} J' \mathcal{E}_{\theta(k)}\{P\} J \right) w(k) \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Alternativamente, considere a desigualdade em (11). Como $\sum_{l \in \mathbb{M}_i} \alpha_{il} (A'_{il} \mathcal{E}_i\{P\} A_{il} + C'_{il} C_{il}) \geq 0$, segue que $P_i - \frac{1}{\delta^2} P_i J J' P_i > 0$, e assim

$$0 < \frac{1}{\delta^2} J' P_i J < I. \quad (16)$$

Portanto, a desigualdade em (15) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} & \delta^2 \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E} \left(w(k)' \left(I - \frac{1}{\delta^2} J' \mathcal{E}_{\theta(k)}\{P\} J \right) w(k) \right) \\ & \leq \delta^2 (1 - \nu) \|w\|_2^2, \end{aligned}$$

onde $\nu \in (0, \frac{1}{\delta^2} \min_{i \in \mathbb{N}, j} \lambda_j(J' \mathcal{E}_i\{P\} J))$. Além disso, como a Equação (16)   válida, então $0 < (1 - \nu) < 1$, e assim

$$\|z\|_2^2 \leq \delta^2 (1 - \nu) \|w\|_2^2 < \delta^2 \|w\|_2^2. \quad (17)$$

Usando a definição da norma $\mathcal{H}_\infty$ em (9), podemos escrever

$$\|\mathcal{G}_f\|_\infty^2 = \sup_{\theta_0, w \in l_2^r(\mathcal{F})} \frac{\|z\|_2^2}{\|w\|_2^2} < \delta^2.$$

Adicionalmente, considere $S \in \mathbb{H}^{n+}$, a solução do gramiano de observabilidade em (7). Como $\sum_{l \in \mathbb{M}_i} \alpha_{il} C'_{il} C_{il} + \frac{1}{\delta^2} P_i J J' P_i \geq \sum_{l \in \mathbb{M}_i} \alpha_{il} C'_{il} C_{il}$, por meio da Nota 2, pode-se concluir que $P_i \geq S_i$, e portanto

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}_f\|_2^2 &= \sum_{i=1}^N \mu_i \text{Tr}(J' \mathcal{E}_i(S) J) \\ &\leq \sum_{i=1}^N \mu_i \text{Tr}(J' \mathcal{E}_i(P) J). \end{aligned}$$

provando assim o resultado desejado. $\square$

Observação 3 Para o caso de observação completa, isto é, $\hat{\theta}(k) \equiv \theta(k)$, é evidente que $\alpha_{ii} = 1$, $A_{ii} = A_i + B_i K_i$ e $C_{ii} = C_i + D_i K_i$. Para que ocorra a equivalência entre as condições do Teorema 1 e os resultados de observação completa de (Costa and Marques, 1998),   necessário considerar a definição de norma $\mathcal{H}_2$ utilizada nesse último trabalho, que difere da Definição 2. Nesse caso, pode-se verificar que as condições obtidas são iguais as (11) e (12) do Teorema 1. A mudança fica restrita a Equação (13), que se torna

$$\|\mathcal{G}_f\|_2^2 \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{Tr}(J' P_i J). \quad (18)$$

Em posse do resultado do Teorema 1, considere o seguinte conjunto de desigualdades matri-

ciais lineares, para todo $i \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{M}_i$:

$$\begin{bmatrix} Z'_l + Z_l - X_{il} & \bullet & \bullet \\ A_i Z_l + B_i Y_l & M_i & \bullet \\ C_i Z_l + D_i Y_l & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} Q_i & J & Q_i \\ \bullet & \delta^2 I & 0 \\ \bullet & \bullet & R_i \end{bmatrix} > 0, \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} R_i & R_i \Gamma_i(\alpha) \\ \bullet & \text{diag}_i(X_{il}) \end{bmatrix} > 0, \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} M_i & M_i \Gamma_i(p) \\ \bullet & \text{diag}(Q_i) \end{bmatrix} > 0, \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} P_i & I \\ \bullet & Q_i \end{bmatrix} > 0, \quad (23)$$

onde,

- $\Gamma_i(x) = [\sqrt{x_{i1}}I \quad \sqrt{x_{i2}}I \quad \dots \quad \sqrt{x_{iK}}I]$, para um conjunto de constantes reais tais que $\sum_{j=1}^K x_{ij} = 1$;
- para um conjunto de matrizes $V_i = \{V_{i1}, \dots, V_{iK}\}$, $V_i \in \mathbb{H}^+$, $\text{diag}_i(V_{ij}) = \text{diag}(V_{i1}, V_{i2}, \dots, V_{iK})$.

Dessa forma, pode-se reescrever o problema de otimização (10):

$$\|\mathcal{G}_f\|_2^2 \leq \min_{\xi} \{ \gamma^2; \text{sujeito a (19) - (23)} \}, \quad (24)$$

onde $\gamma^2 = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_i \text{Tr}(J' \mathcal{E}_i(P) J)$ e $\xi = \{P_i, Q_i, S_i, M_i, X_{il}, Z_l, Y_l, i \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{M}_i\}$.

O próximo teorema apresenta condições suficientes para a obtenção de controladores que estabilizam estocasticamente (3) e respeitam os limitantes superiores definidos em (12) e (13) para o problema de otimização (24).

Teorema 2 *Considere que existam matrizes simétricas positivas definidas P, Q, R e $M \in \mathbb{H}^n$, bem como matrizes X_{il} , $i \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{M}_i$, e Y_l, Z_l , $l \in \mathbb{M}$, que satisfaçam as desigualdades (19)-(23) para todo $i \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{M}_i$ no problema de otimização (24). Em caso afirmativo, então um conjunto de controladores $K \in \mathcal{K}$ que estabilizam estocasticamente o sistema (3) e satisfazem os limitantes (12) e (13)   dado por $K_l = Y_l Z_l^{-1}$, para todo $l \in \mathbb{M}$.*

Prova: É suficiente mostrar que o conjunto de desigualdades (19)-(23)   equivalente a (11). Por complemento de Schur, a Equação (21) leva a $(\sum_{l \in \mathbb{M}_i} \alpha_{il} X_{il}^{-1})^{-1} > R_i$. Assim, a Equação (20) pode ser escrita, após substituir R_i por $(\sum_{l \in \mathbb{M}_i} \alpha_{il} X_{il}^{-1})^{-1}$, aplicar o complemento de Schur, e multiplicar a desigualdade obtida por Q_i^{-1} pela esquerda e direita, como:

$$Q_i^{-1} - \frac{1}{\delta^2} Q_i^{-1} J J' Q_i^{-1} > \sum_{l \in \mathbb{M}_i} \alpha_{il} X_{il}^{-1}. \quad (25)$$

Pode ser notado que a Equação (22) leva a $(\sum_{i \in \mathbb{N}} p_{ij} Q_i^{-1})^{-1} > M_i$ e, além disso, sabe-se que $Z'_l X_{il}^{-1} Z_l > Z_l + Z'_l - X_{il}$. Defina $Y_l = K_l Z_l$ e reescreva a Equação (19) como

$$\begin{bmatrix} Z'_l X_{il}^{-1} Z_l & \bullet & \bullet \\ A_{il} Z_l & (\sum_{i \in \mathbb{N}} p_{ij} Q_i^{-1})^{-1} & \bullet \\ C_{il} Z_l & 0 & I \end{bmatrix} > 0. \quad (26)$$

onde A_{il} e C_{il} são definidos em (4) e (5). Aplique a transformação de similaridade $\text{diag}(Z_l^{-1}, I, I)$ e na sequência o complemento de Schur em (26) para obter $X_{il}^{-1} > A'_{il} \sum_{i \in \mathbb{N}} p_{ij} Q_i^{-1} A_{il} + C'_{il} C_{il}$. Assim a Equação (25) pode ser reescrita como $Q_i^{-1} - \frac{1}{\delta^2} Q_i^{-1} J J' Q_i^{-1} > \sum_{l \in \mathbb{M}_i} \alpha_{il} (A'_{il} \mathcal{E}_i(Q^{-1}) A_{il} + C'_{il} C_{il})$.

Por fim, considere que a Equação (23) leva a $P_i > Q_i^{-1}$, e, como $\sum_{i \in \mathbb{N}} \text{Tr}(J \mathcal{E}_i(P) J)$ é minimizado em (24), segue que $P_i = Q_i^{-1} + I\epsilon$, para $\epsilon \rightarrow 0^+$ de precisão, o que completa a prova. $\square$

5 Exemplo numérico

O exemplo numérico é retirado de (Costa and Marques, 1998). As matrizes do sistema são dadas por

$$\left(\begin{array}{cc|cc} A_i & C_i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0.9974 & 0.0539 & -1 & 1 \\ -0.1078 & 1.1591 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

e $D_i = [0 \quad 1]'$ para $i \in \{1, 2\}$, e

$$\left(\begin{array}{cc|cc} B_1 & B_2 & J \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0.0013 & 0.0013 & 1 & 0 \\ 0.0539 & 0.1078 & 1 & 0.1 \end{array} \right).$$

A matriz de transição de probabilidade $\mathbb{P}$ e a distribuição de probabilidade inicial $P(\theta(0) = i) = \mu_i$ são dados por

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}, \mu' = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}.$$

Inicialmente, considere que o limitante superior da norma $\mathcal{H}_\infty$ é dado por $\delta = 80$ e a matriz de probabilidade do detector dada por

$$[\alpha_{il}] = \begin{bmatrix} \rho & 1 - \rho \\ 1 - \rho & \rho \end{bmatrix},$$

para $\rho \in [0, 1]$.

A Figura 1 mostra o limitante superior da norma $\mathcal{H}_2$ calculado pelo Teorema 1 e a norma exata, calculada através da Proposição 1, em função da probabilidade correta de detecção, ρ .

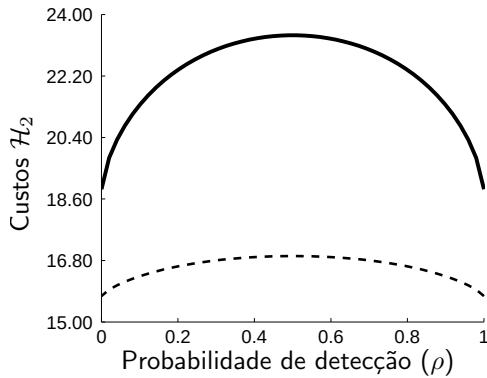


Figura 1: Custo garantido $\mathcal{H}_2$ (Teorema 1 - linha cheia) e norma exata (Proposição 1 - Linha Pontilhada).

Verifica-se que, para os casos $\rho = 0$ e $\rho = 1$, os custos garantidos atingem o seu menor valor. Esse comportamento é esperado, pois esses dois casos correspondem ao de observação completa $\hat{\theta}(k) = \theta(k)$, discutido na Nota 1. O ponto de máxima obtido na curva de custo garantido na Figura 1 corresponde ao caso em que o detector não provê informação útil ao controlador, pois as probabilidades de emissão são iguais. Cabe ainda notar que, diferente dos comportamentos verificados em (Costa et al., 2015), as curvas de custo garantido e norma exata não se tocam em $\rho = 0$ e $\rho = 1$. Esse fato decorre da própria natureza do problema misto aproximado $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, pois a condição adicional da norma $\mathcal{H}_\infty$ torna o problema suficiente para o controle $\mathcal{H}_2$.

Para que os resultados de (Costa and Marques, 1998) possam ser analisados, é necessário que a Equação (13) do Teorema 1 seja substituída pela Equação (18) no problema de otimização (24). Dessa forma, através dessa nova condição, obtém-se a mesma norma obtida em (Costa and Marques, 1998) para os casos $\rho = 0$ e $\rho = 1$, de valor $\|\mathcal{G}_f\|_2^2 = 728.4462$, bem como os ganhos $K_1 = [-1.3667 \quad -4.4304]$ e $K_2 = [-1.6010 \quad -4.6404]$.

6 Conclusão

Nesse trabalho, por meio da abordagem do modelo oculto de Markov, na qual um detector emite estimativas do estado da cadeia de Markov, apresentamos condições para o projeto de controladores que estabelecem limitantes superiores para as normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ de um sistema markoviano de cadeia oculta. Esses controladores dependem somente do modo estimado de Markov, o que constitui uma abordagem realista para aplicações. Além disso, o resultado obtido generaliza o caso de observação completa já presente na literatura, bem como possibilita o estudo de casos intermediários de observação da cadeia para o controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$.

O trabalho é encerrado com um exemplo numérico que ilustra o resultado obtido.

7 Agradecimentos

Pesquisa financiada em partes pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processo No. 2015/09912-8 para o primeiro autor; e para o segundo autor, pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), processo No. 304091/2014-6, Fapesp/BG Research Centre for Gas Innovation, processo No. 2014/50279-4 e à Fundação de Apoio à Universidade de São Paulo (FUSP).

Referências

- Costa, O. L. V., Fragoso, M. D. and Marques, R. P. (2005). *Discrete-Time Markov Jump Linear Systems*, Springer.
- Costa, O. L. V., Fragoso, M. D. and Todorov, M. (2015). A detector-based approach for the H_2 control of Markov jump linear systems with partial information, *IEEE Trans. on Automatic Control*.
- Costa, O. L. V. and Marques, R. P. (1998). Mixed H_2/H_∞ -control of discrete-time markovian jump linear systems, *IEEE Trans. on Automatic Control* **43**(1).
- Do Val, J. B., Geromel, J. C. and Gonçalves, A. P. (2002). The H_2 -control for jump linear systems: cluster observations of the Markov state, *Automatica* **38**(2).
- Geromel, J. C., Gonçalves, A. P. and Fioravanti, A. R. (2009). Dynamic output feedback control of discrete-time Markov jump linear systems through linear matrix inequalities, *SIAM Journal on Control Optim.* **48**(2).
- Geromel, J. C., Peres, P. L. D. and Souza, S. R. (1995). A convex approach to the mixed control problem for discrete-time uncertain systems, *SIAM Journal on Control Optim.* **33**(6).
- Gonçalves, A. P., Fioravanti, A. R. and Geromel, J. C. (2012). H_∞ robust and networked control of discrete-time MJLS through LMIs, *Journal of the Franklin Institute* **349**(6).
- Mahmoud, M. S., Shi, P., Boukas, E. K. and Jain, L. (2008). Simultaneous H_2/H_∞ control of uncertain jump systems with functional time-delays, *Int. Journal of Robust and Nonlinear Control* **18**(3).
- Todorov, M. G., Fragoso, M. D. and Costa, O. L. V. (2015). A new approach for the H_∞ control of markov jump linear systems with partial information, *2015 54th IEEE CDC*.