

TEORIA UNIFICADA DE SISTEMAS DE CONTROLE AMOSTRADOS

GABRIELA WERNER GABRIEL* JOSÉ CLÁUDIO GEROMEL*

*Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação (FEEC), UNICAMP
Campinas, SP, Brasil

Email: ggabriel@dca.fee.unicamp.br; geromel@dsce.fee.unicamp.br

Resumo— This paper is devoted to present a general and unified theory for stability and performance analysis of Markov jump nonlinear systems governed by a state feedback sampled-data control law, where the sampling instants are evenly spaced. Initially, the closed-loop system is alternatively but equivalently described as a hybrid system. Then, the mean square stability and performance optimization of the general nonlinear hybrid system are addressed. This study is based on the existence of a solution of a Two-Point Boundary Value Problem (TPBVP) defined in the time interval corresponding to two consecutive sampling instants. Moreover, by solving problems of this special class, the performance index of interest is exactly determined. An immediate consequence of the proposed theory is the possibility to evaluate exactly several performance indexes similar to the celebrated $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ norms that are often adopted in the context of Markov jump linear systems. Some special cases are analyzed and compared with the results available in the literature.

Palavras-chave— Sampled-data systems, Markov jump systems, hybrid systems

Resumo— Este artigo tem como objetivo apresentar uma teoria geral e unificada para a análise de estabilidade e o desempenho de sistemas não-lineares com saltos markovianos governados por uma lei de controle amostrado, em que os instantes de amostragem são igualmente espaçados. Inicialmente, o sistema em malha fechada é descrito de forma alternativa, mas equivalente, como um sistema híbrido. Em seguida, condições que asseguram a estabilidade em média quadrática e o desempenho ótimo do sistema híbrido genérico são consideradas. Este estudo é baseado na existência de solução de um problema com duas condições de contorno definido no intervalo de tempo correspondente a dois instantes de amostragem consecutivos. Além disso, através da solução de problemas desta classe especial, o índice de desempenho de interesse é exatamente calculado. Uma consequência imediata da teoria proposta é a possibilidade de calcular diversos índices de desempenho similares às normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ que são frequentemente adotados no contexto dos sistemas lineares com saltos markovianos. Alguns casos especiais são analisados e comparados com os resultados disponíveis na literatura.

Palavras-chave— Sistemas de controle amostrado, sistemas com saltos markovianos, sistemas híbridos

1 Introdução

O controle ótimo de sistemas dinâmicos tem sido bastante estudado nas últimas décadas. Esta área de estudos foi alavancada com os avanços de Bellman (1954) na área da programação dinâmica. Com a possibilidade efetiva de realizar o controle através da minimização de índices de desempenho, dentre os quais destacam-se as normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$, o interesse da comunidade científica no desenvolvimento da teoria de controle ótimo aumentou. Neste contexto, como referências para estudos, citam-se os livros de Zhou et al. (1996) e Colaneri et al. (1997). Além disso, os avanços dos recursos computacionais disponíveis aliados à possibilidade de traduzir muitos destes problemas de otimização em LMIs, Boyd et al. (1994), reforçaram ainda mais os desenvolvimentos na área. Muitos trabalhos recentes, que tratam sistemas dinâmicos específicos, podem ser encontrados, como por exemplo Souza et al. (2014), Geromel e Gabriel (2015), Tan e Grigoriadis (2000) e Hu, Shi e Frank (2006), todos no âmbito de sistemas amostrados.

Ressalta-se que existem na literatura diferentes técnicas para o projeto de sistemas de controle amostrado. A primeira abordagem para tratar destes sistemas mistos, em que sinais contínuos convivem com sinais intrinsecamente discre-

tos no tempo, foi transformá-los em sinais puramente discretos (*aggregation*) ou puramente contínuos (*continuation*). Estes modelos, no entanto, não refletem o comportamento exato dos sistemas reais, podendo haver ou a supressão de características entre instantes de amostragem ou a arbitrariedade das características interpoladas, para cada um dos respectivos casos, ver Branicky (1995) e Antsaklis et al. (1993). Para estas abordagens, a teoria de controle já é bem sedimentada. Como referência, ver os livros de Kirk (1970) e Zhou et al. (1996). Posteriormente, e mais amplamente utilizadas, foram introduzidas a técnica de *lifting*, como em Bamieh et al. (1991), e a abordagem híbrida, conforme utilizado em Goebel et al. (2009) e Geromel e Gabriel (2015).

Novamente, nota-se que estas técnicas, em geral, são aplicadas a sistemas específicos, como por exemplo os sistemas LTI, como em Souza et al. (2014), os sistemas LPV, como em Tan e Grigoriadis (2000), e os sistemas lineares com saltos markovianos, como em Geromel e Gabriel (2015). Para casos não-lineares genéricos, poucos trabalhos são encontrados na literatura. Neste sentido, Hu, Shi e Huang (2006) propõem um modelo unificado para assegurar a estabilidade e realizar o projeto de controle robusto em um sistema com parâmetros markovianos a partir de condições apenas suficientes. No entanto, de acordo com o conheci-

mento dos autores, não há na literatura atual trabalhos que apresentem condições necessárias e suficientes para a análise da estabilidade, ao mesmo tempo em que permitam calcular o valor exato do índice de desempenho a ser utilizado no processo de otimização da lei de controle. Desta forma, este artigo propõe-se, de forma inédita, a apresentar uma abordagem unificada para a análise de estabilidade de sistemas não-lineares com saltos markovianos através de condições não conservativas que permitem, ao mesmo tempo, determinar exatamente o valor do critério de desempenho adotado. Este resultado é de fundamental importância, uma vez que, em princípio, possibilita o cálculo da lei ótima de controle para sistemas híbridos - uma extensão futura deste trabalho.

A notação utilizada é padrão. Para matrizes quadradas, $\text{tr}(\cdot)$ denota a função traço. Para matrizes ou vetores reais, $(\cdot)'$ indica a transposta. O símbolo $\mathbb{R}$ indica o conjunto dos números reais e $\mathbb{N}$ indica o conjunto dos números naturais. Para qualquer matriz simétrica, $X > 0$ ($X \geq 0$) indica que ela é (semi-)definida positiva. O operador esperança matemática é denotado por $\mathcal{E}(\cdot)$, a esperança condicional é denotada por $\mathcal{E}^\nu(\cdot) = \mathcal{E}\{\cdot \mid \nu\}$ e $\mathcal{P}(\cdot)$ indica a probabilidade de $(\cdot)$. A notação $\xi(t_k^-)$, $t_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, indica o limite à esquerda de $\xi(t)$. O conjunto formado pelos N primeiros números naturais é denotado por $\mathbb{K} = \{1, 2, \dots, N\}$.

2 Formulação unificada

Considere um sistema dinâmico contínuo em sua representação no espaço de estados definida por

$$\dot{x}(t) = f_{\theta(t)}(x(t), u(t), w(t)) \quad (1)$$

evoluindo a partir das condições iniciais $x(0) = x_0$ em que $f_i(0, 0, 0) = 0$, $\forall i \in \mathbb{K}$. Para este sistema, $x(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ é o estado, $u(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ é o controle e $w(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^r$ é uma entrada exógena definida em alguma classe de sinais $\mathcal{W}$ tal que $0 = w \in \mathcal{W}$. Além disso, $\{\theta(t) \in \mathbb{K}\}$ é uma variável aleatória governada por um processo markoviano a tempo contínuo caracterizado por uma condição inicial $\theta(0) = \theta_0$ tal que $\mathcal{P}(\theta_0 = i) = \pi_{i0} \geq 0$, $\forall i \in \mathbb{K}$, que satisfaz $\sum_{i \in \mathbb{K}} \pi_{i0} = 1$. A matriz de taxa de transição $\{\lambda_{ij}\} = \Lambda \in \mathbb{R}^{N \times N}$ define as probabilidades de transição,

$$\mathcal{P}(\theta(t+h) = j \mid \theta(t) = i) = \delta_{i-j} + \lambda_{ij}h + o(h), \quad (2)$$

onde δ_{i-j} é a função delta de Kronecker, ou seja, $\delta_{i-j} = 1$, se $i = j \in \mathbb{K}$, e $\delta_{i-j} = 0$, caso contrário, e $\lim_{h \rightarrow 0^+} o(h)/h = 0$. Os elementos de Λ são tais que $\lambda_{ij} \geq 0$, $\forall i \neq j$, e $\sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} = 0$, $\forall i \in \mathbb{K}$, o que implica em $\lambda_{ii} \leq 0$, $\forall i \in \mathbb{K}$.

Além disso, considere uma sequência discreta de tempos de amostragem definida por $\{t_k\}_{k=0}^\infty$, tal que $t_0 = 0$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = +\infty$, e assuma que

$t_{k+1} - t_k = T > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, ou seja, os instantes de amostragem são igualmente espaçados e independentes do processo markoviano. Defina a lei de controle amostrado constante por partes conforme

$$U = \{u \in \mathbb{R}^m \times [0, +\infty) : \\ u(t) = u(t_k) = u_k, \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad \forall k \in \mathbb{N}\}. \quad (3)$$

Desta forma, qualquer problema de controle ótimo, em sua formulação geral, resume-se a encontrar a solução de

$$\min_{u \in U} \sup_{w \in \mathcal{W}} \int_0^\infty \mathcal{E} \{g_{\theta(\tau)}(x(\tau), u(\tau), w(\tau))\} d\tau \quad (4)$$

sujeito a (1), onde $g_i(\cdot, \cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função tal que $g_i(0, 0, 0) = 0$ e define um custo positivo sempre que uma trajetória de (1) se desvia do ponto de equilíbrio em zero, ou seja, $g_i(x, u, 0) > 0$, $\forall (x, u) \neq 0$. Para as entradas consideradas, assume-se que uma solução de (1) existe e é única.

Desta forma, no contexto de controle ótimo, deseja-se determinar uma lei de controle em malha fechada que, para o caso de controle amostrado, é definida de forma genérica por $u(t) = u_k = \mu_{\theta(t_k)}(x(t_k))$, $k \in \mathbb{N}$, onde $\mu_{\theta}(x)$ é uma função suficientemente suave $\mu_{\theta}(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, com $\theta(t_k) = \theta \in \mathbb{K}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Nota-se que o problema (4) depende da minimização do índice de desempenho

$$\mathcal{J}(u) = \sup_{w \in \mathcal{W}} \int_0^\infty \mathcal{E} \{g_{\theta(\tau)}(x(\tau), u(\tau), w(\tau))\} d\tau \quad (5)$$

sujeito a (1) e à estrutura de controle definida em (3). Esta é uma formulação geral de um problema de controle ótimo de sistemas markovianos não lineares a tempo contínuo sujeito às restrições impostas por (3). De acordo com os autores, a literatura não contempla resultados que permitam tratá-lo. Aqui, este problema será tratado através de um problema com duas condições de contorno (TPBVP) associado a um conjunto de equações acopladas de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJBE) que permitem calcular o custo sempre que admitirem uma solução limitada.

Em vista desta classe de problemas, uma dificuldade imediata para o cálculo de (5) corresponde aos saltos que ocorrem na lei de controle nos instantes de amostragem, o que causa uma descontinuidade na função $\mu_{\theta(t)}(x(t))$, em $t = t_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Para contornar esta dificuldade, a teoria dos sistemas híbridos se mostra bastante adequada, conforme os trabalhos anteriores de Souza et al. (2014) e Geromel e Gabriel (2015), entre outros. Assim, definindo-se a variável de estado

estendida $\xi = [x' \ u']' \in \mathbb{R}^{n+m}$ e

$$F_\theta(\xi, w) = \begin{bmatrix} f_\theta(x, u, w) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$H_\theta(\xi) = \begin{bmatrix} x \\ \mu_\theta(x) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

então o sistema não linear (1) sujeito a (3) pode ser reescrito como

$$\dot{\xi}(t) = F_\theta(\xi, w), \quad (8)$$

$$\xi(t_k) = H_{\theta(t_k^-)}(\xi(t_k^-)) \quad (9)$$

com condições iniciais $\xi(0^-) = \xi_0$ e $\theta(0^-) = \theta(0) = \theta_0 \in \mathbb{K}$, o qual é válido $\forall t \in [t_k, t_{k+1})$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Além disso, utilizando-se a mesma transformação de variável anterior, a função custo torna-se $G_\theta(\xi, w) = g_\theta(x, u, w)$, o que permite reescrever (5) de forma totalmente equivalente como

$$\mathcal{J} = \sup_{w \in \mathcal{W}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathcal{E} \{ G_{\theta(\tau)}(\xi(\tau), w(\tau)) \} d\tau \quad (10)$$

sujeita a (8)–(9). De fato, a primeira equação de (8) reproduz exatamente a equação (1), enquanto a segunda impõe $u(t)$ constante $\forall t \in [t_k, t_{k+1})$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Por outro lado, a primeira equação de (9) impõe a continuidade da trajetória definida pela variável de estado $x(t)$ nos instantes t_k , $\forall k \in \mathbb{N}$, ao mesmo tempo em que a segunda equação de (8) estabelece a descontinuidade da lei de controle $u(t)$ nos instantes t_k , $\forall k \in \mathbb{N}$, ou seja, $u(t_k) = \mu_{\theta(t_k)}(x(t_k^-)) = \mu_{\theta(t_k)}(x(t_k))$ quase certamente (*almost surely*) pois o processo markoviano definido por (2) faz com que $\theta(t_k) = \theta(t_k^-)$ com probabilidade um. Consequentemente, verifica-se a equivalência entre o sistema definido por (1), sujeito à lei de controle (3), e o sistema híbrido (8)–(9). Finalmente, nota-se que a descontinuidade de (8)–(9) está totalmente concentrada nas funções $H_i(\xi(t_k^-))$, $\forall i \in \mathbb{K}$.

3 Estabilidade e desempenho

Para a análise da estabilidade de (8)–(9), baseada no índice de desempenho (10), como é usual na literatura de sistemas dinâmicos com saltos markovianos, ver Costa et al. (2013) e Gabriel (2016), considera-se uma coleção de funcionais não negativos $V_i(\xi, t)$ definidos em $\mathbb{R}^{n+m} \times [t_k, t_{k+1})$, $\forall i \in \mathbb{K}$ e $\forall k \in \mathbb{N}$. Devido a natureza estocástica de (8)–(9), define-se o variacional em relação ao tempo $t \in [t_k, t_{k+1})$ através do gerador infinitesimal $\mathcal{L}^{i, \xi} \{ \cdot \}$, que aplicado aos funcionais $V_i(\xi, t)$, fornece um conjunto de funções de $\xi(t) = \xi$ e de $w(t) = w \in \mathcal{W}$, para cada $\theta(t) = i \in \mathbb{K}$, de acordo com Costa et al. (2013) e Smears (2011). Matematicamente,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^w V_i(\xi, t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ -V_i(\xi, t) \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{E}^{i, \xi} \{ V_{\theta(t+h)}(\xi(t+h), t+h) \} \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Consequentemente, desenvolvendo-se a relação (11) e utilizando-se (2), obtém-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^w V_i(\xi, t) &= \\ &= \frac{\partial V_i'}{\partial \xi} F_i(\xi, w) + \frac{\partial V_i}{\partial t} + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} V_j, \end{aligned} \quad (12)$$

$\forall i \in \mathbb{K}$ e $\forall t \in [t_k, t_{k+1})$. Finalmente, utilizando (12), impõe-se que $V_i(\xi, t)$, $\forall i \in \mathbb{K}$, seja solução da versão estocástica da HJBE. Nota-se novamente que $\mathcal{L}^w V_i(\xi, t)$ depende da entrada $w \in \mathcal{W}$ o que permite escrever

$$\begin{aligned} \sup_{w \in \mathcal{W}} \left\{ \frac{\partial V_i'}{\partial \xi} F_i(\xi, w) + G_i(\xi, w) \right\} \\ + \frac{\partial V_i}{\partial t} + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} V_j = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$\forall i \in \mathbb{K}$ e $\forall t \in [t_k, t_{k+1})$. A solvabilidade da HJBE (13) depende de cada realização particular para as funções $F_i(\xi, w)$ e $G_i(\xi, w)$, $\forall i \in \mathbb{K}$. Um fato importante é que nenhuma hipótese adicional sobre estas funções é necessária. No entanto, tendo em vista a natureza invariante no tempo de (13), suas soluções admitem extensões periódicas, ou seja, $V_i(\xi, t) = V_i(\xi, t - t_k)$, $\forall t \in [t_k, t_{k+1})$, $\forall k \in \mathbb{N}$ e $\forall i \in \mathbb{K}$. Uma decorrência imediata deste fato é a possibilidade de analisar o comportamento do sistema híbrido (8)–(9), em todo o intervalo $t \in \mathbb{R}^+$, analisando-se apenas o primeiro intervalo de amostragem $t \in [0, T)$. O próximo lema mostra que esta propriedade é verdadeira sempre que (13) admita uma solução $V_i(\xi, t)$ que satisfaça duas condições de contorno, a saber

$$V_i(\xi, 0) = v_i(\xi), \quad (14)$$

$$V_i(\xi, T) = v_i(H_i(\xi)), \quad (15)$$

$\forall i \in \mathbb{K}$. Por hipótese, cada função $v_i(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ é definida positiva, isto é, $v_i(\xi) > 0$, $\forall 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$ e $v_i(0) = 0$.

Lema 1 *Seja $T > 0$ dado. Se existirem funções $V_i(\xi, t)$ que satisfaçam (13), com as condições de contorno (14)–(15), no primeiro intervalo de tempo $t \in [0, T)$, então $V_i(\xi, t) = V_i(\xi, t - t_k)$, $\forall i \in \mathbb{K}$, também é solução em todo intervalo subsequente $t \in [t_k, t_{k+1})$, $\forall 1 \leq k \in \mathbb{N}$.*

Prova: A prova decorre imediatamente do fato de que a equação diferencial (13), bem como as condições de contorno (14)–(15), são invariantes no tempo. Assim sendo, $\forall k \in \mathbb{N}$, uma solução dependendo apenas de $t_{k+1} - t_k = T > 0$ pode ser construída a partir daquela obtida no primeiro intervalo de tempo $t \in [0, T)$. $\square$

Em decorrência do Lema 1, o próximo teorema estabelece condições para a garantia da estabilidade em média quadrática do sistema híbrido, ao mesmo tempo em que mostra-se como calcular

um limitante superior do  ndice de desempenho definido em (10). Nenhuma aproximação é introduzida nos cálculos realizados.

Teorema 1 *Seja $T > 0$ dado. Se existirem funções definidas positivas $v_i(\xi) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\forall i \in \mathbb{K}$, tais que $V_i(\xi, t)$ satisfaçam (13) com as condições de contorno*

$$V_i(\xi, 0) \leq v_i(\xi), \quad V_i(\xi, T) \geq v_i(H_i(\xi)), \quad (16)$$

então o sistema híbrido (8)–(9)   estável em média quadrática e o  ndice de desempenho (10) satisfaz o limitante superior

$$\mathcal{J} \leq \sum_{i \in \mathbb{K}} \pi_{i0} v_i(H_i(\xi_0)). \quad (17)$$

Prova: Suponha a existência de um conjunto de funções $V_i(\xi, t)$, $i \in \mathbb{K}$, solução da HJBE (13) sujeita às condições de contorno (16). Devido à invariância no tempo desta solução (ver o Lema 1), as condições de contorno podem ser reescritas na forma $V_i(\xi, t_k) \leq v_i(\xi)$ e $V_i(\xi, t_{k+1}) \geq v_i(H_i(\xi))$, $\forall i \in \mathbb{K}$. Adotando a not   o já utilizada anteriormente, isto é, $\xi(t_k) = \xi$ e $\theta(t_k) = i \in \mathbb{K}$, levando em conta que (8)   um processo de It  e aplicando a fórmula de Dynkin no intervalo de tempo $t \in [t_k, t_{k+1})$, nota-se que a solução $V_i(\xi, t_k)$ que resolve o TPBVP t m m satisfaz

$$\begin{aligned} & V_i(\xi, t_k) - \mathcal{E}^{i,\xi} \left\{ V_{\theta(t_{k+1})}(\xi(t_{k+1}^-), t_{k+1}^-) \right\} \\ & \geq \mathcal{E}^{i,\xi} \left\{ \int_{t_k}^{t_{k+1}} G_{\theta(\tau)}(\xi(\tau), w(\tau)) d\tau \right\}, \end{aligned} \quad (18)$$

$\forall i \in \mathbb{K}$ e qualquer que seja $w \in \mathcal{W}$. Considerando que existem funções definidas positivas $v_i(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ que satisfazem as condições de contorno (16), tem-se que $V_i(\xi, t_k) \leq v_i(\xi)$ e que

$$\begin{aligned} & V_{\theta(t_{k+1})}(\xi(t_{k+1}^-), t_{k+1}^-) \\ & = V_{\theta(t_{k+1})}(\xi(t_{k+1}^-), t_{k+1}) \\ & \geq v_{\theta(t_{k+1})}(H_{\theta(t_{k+1})}(\xi(t_{k+1}^-))) \\ & = v_{\theta(t_{k+1})}(\xi(t_{k+1})), \end{aligned} \quad (19)$$

$\forall k \in \mathbb{N}$. Para obter esta última desigualdade foi utilizado o fato de que o processo markoviano (2) impõe $\theta(t_{k+1}^-) = \theta(t_{k+1})$, com probabilidade um, sempre que $t_{k+1}^- \rightarrow t_{k+1}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Substituindo estes resultados em (18), decorre que

$$\begin{aligned} & v_i(\xi) - \mathcal{E}^{i,\xi} \{ v_{\theta(t_{k+1})}(\xi(t_{k+1})) \} \\ & \geq \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathcal{E}^{i,\xi} \{ G_{\theta(\tau)}(\xi(\tau), w(\tau)) \} d\tau \end{aligned} \quad (20)$$

  válida para cada $i \in \mathbb{K}$ e qualquer que seja $w \in \mathcal{W}$. Duas consequências podem ser verificadas a partir de (20) e do fato de que $v_i(0) = 0$, $\forall i \in \mathbb{K}$. Primeiro, devido a positividade de $G_i(\cdot, 0)$, $\forall i \in \mathbb{K}$, $\exists \epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que

$\mathcal{E}^{i,\xi}(v_{\theta(t_{k+1})}(\xi(t_{k+1}))) \leq (1 - \epsilon)v_i(\xi(t_k))$, $\forall i \in \mathbb{K}$ e $\forall k \in \mathbb{N}$, o que implica que o processo discreto $\xi(t_k) \rightarrow \xi(t_{k+1})$   estável em média quadrática. Segundo, a partir de (20) obt m-se

$$\begin{aligned} \mathcal{J} & = \sup_{w \in \mathcal{W}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{E}^{i,\xi} \left\{ \int_{t_k}^{t_{k+1}} G_{\theta(\tau)}(\xi(\tau), w(\tau)) d\tau \right\} \\ & \leq \mathcal{E} \{ v_{\theta_0}(\xi_0) \} = \sum_{i \in \mathbb{K}} \pi_{i0} v_i(H_i(\xi_0)) \end{aligned} \quad (21)$$

o qual corresponde ao limitante superior para o  ndice de desempenho $\mathcal{J}$, conforme (17), finalizando, assim, a prova. $\square$

Duas observações são importantes a respeito do Teorema 1. Uma delas corresponde ao fato de que a estabilidade em média quadrática do processo estocástico $\xi(t_k) \rightarrow \xi(t_{k+1})$, $\forall k \in \mathbb{N}$, é fundamental para a convergência de (21). A outra observação diz respeito ao fato de que o valor exato do  ndice de desempenho (10) pode ser calculado segundo as condições explicitadas no próximo corolário.

Corolário 1 *Seja $T > 0$ dado. Se existirem funções definidas positivas $v_i(\xi) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\forall i \in \mathbb{K}$, tais que $V_i(\xi, t)$ satisfaçam (13) com as condições de contorno*

$$V_i(\xi, 0) = v_i(\xi), \quad V_i(\xi, T) = v_i(H_i(\xi)), \quad (22)$$

então o sistema híbrido (8)–(9)   estável em média quadrática e o  ndice de desempenho (10)   dado por

$$\mathcal{J} = \sum_{i \in \mathbb{K}} \pi_{i0} v_i(H_i(\xi_0)). \quad (23)$$

Prova: Considerando-se o desenvolvimento da prova do Teorema 1, as condições de contorno (22) implicam que (20) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} v_i(\xi) & = \sup_{w \in \mathcal{W}} \mathcal{E}^{i,\xi} \left\{ \int_{t_k}^{t_{k+1}} G_{\theta(\tau)}(\xi(\tau), w(\tau)) d\tau \right. \\ & \quad \left. + v_{\theta(t_{k+1})}(\xi(t_{k+1})) \right\}, \end{aligned} \quad (24)$$

$\forall i \in \mathbb{K}$ e $\forall k \in \mathbb{N}$. Como consequência, verifica-se que (17) torna-se uma igualdade, o que conclui a prova. $\square$

Este resultado tem importância específica pois atesta que o valor exato do critério de desempenho em estudo pode ser calculado desde que seja possível determinar uma solução da HJBE com as condições de contorno especificadas em (22). Se existir, a minimização do limitante superior fornece automaticamente o resultado exato do critério de desempenho adotado.

4 Exemplos – casos particulares

Como forma de validação dos resultados obtidos até agora, alguns casos particulares importantes e bastante tratados na literatura são analisados em seguida.

4.1 Sistema híbrido de controle

Inicialmente, considere o sistema linear híbrido determinístico com condição inicial nula

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) &= F\xi(t) + Jw(t) \\ z(t) &= C\xi(t) \\ \xi(t_k) &= H\xi(t_k^-) \end{cases} \quad (25)$$

definido em $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}$, para o qual o modo é único, ou seja, $\mathbb{K} = \{1\}$, e onde a entrada de perturbação corresponde à entrada impulsiva $w(t) = e_l \delta(t^-)$ em que $e_l \in \mathbb{R}^r$ é a l -ésima coluna da matriz identidade. Defina o índice de desempenho associado à norma $\mathcal{H}_2$, conforme

$$\mathcal{J} = \sum_{l=1}^r \int_0^\infty \mathcal{E} \{z_l(t)' z_l(t)\} dt, \quad (26)$$

onde $z_l(t)$ é a saída correspondente a cada uma das r entradas. Consequentemente, com $V(\xi, t) = \xi' P(t) \xi$, (13) é satisfeita desde que $P(t)$ satisfaça a equação diferencial de Lyapunov

$$\dot{P} + F'P + PF + C'C = 0. \quad (27)$$

Esta função resolve o TPBVP do Teorema 1 com $v(\xi) = \xi' S \xi$ impondo-se as condições de contorno inicial $P(0) = S$ e final $P(T) = H'SH$ para alguma matriz $S > 0$. Desta forma, pelo Corolário 1, o valor do índice de desempenho $\mathcal{J}$, de acordo com (26), é dado por

$$\mathcal{J} = \text{tr}(J'H'SHJ) \quad (28)$$

que corresponde exatamente ao valor obtido por Souza et al. (2014), conforme esperado. Analogamente, fazendo-se $H = I$ em (25), recupera-se o caso de controle $\mathcal{H}_2$ para sistemas LTI. De fato, as condições de contorno $P(0) = P(T) = S$ permitem adotar a solução constante $P(t) \equiv S > 0$ que satisfaz as condições do Teorema 1. Como consequência, utilizando-se (27) obtém-se uma equação algébrica de Lyapunov cuja solução, para um sistema assintoticamente estável existe, é única e leva ao índice de desempenho $\mathcal{J} = \text{tr}(J'SJ)$, de acordo com o Corolário 1 e Colaneri et al. (1997), conforme esperado.

Realizando-se análise similar, é possível ainda recuperar os casos de sistema híbrido de cálculo de norma $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas híbridos e para sistemas clássicos LTI. Para isso, considera-se o índice de desempenho

$$\mathcal{J} = \sup_{w \in \mathcal{W}} \int_0^\infty \mathcal{E} \{z(t)' z(t) - \gamma^2 w(t)' w(t)\} dt, \quad (29)$$

em que $\mathcal{W}$ indica o conjunto das funções contínuas com norma $\mathcal{L}_2$ finita. O valor $\mathcal{J} = 0$ que ocorre para $\gamma = \gamma^*$ caracteriza o valor da norma $\mathcal{H}_\infty$, como tratado a seguir.

4.2 MJLS híbrido

Considere o sistema linear híbrido com saltos markovianos (HMJLS) com condições iniciais nulas, o qual, de acordo com Gabriel et al. (2016), pode ser escrito conforme

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) &= F_i \xi(t) + J_i w(t) \\ z(t) &= C_i \xi(t) \\ \xi(t_k) &= H_i \xi(t_k^-) \end{cases}, \quad (30)$$

válido $\forall i \in \mathbb{K}$ e $\forall t \in [t_k, t_{k+1})$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Defina o índice de desempenho segundo (29) para um dado valor de $\gamma > 0$ e considere (29) e (30) no desenvolvimento de (13) para $V_i(\xi, t) = \xi' P_i(t) \xi$. Neste caso, conclui-se que $P_i(t)$ deve satisfazer a equação diferencial de Riccati

$$\begin{aligned} \dot{P}_i + F_i' P_i + P_i F_i + \gamma^{-2} P_i J_i J_i' P_i \\ + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j + C_i' C_i = 0, \end{aligned} \quad (31)$$

$\forall i \in \mathbb{K}$. Adotando-se $v_i(\xi) = \xi' S_i \xi$, $\forall i \in \mathbb{K}$, obtém-se as condições de contorno iniciais $P_i(0) \leq S_i$ e finais $P_i(T) \geq H_i' S_i H_i$. Uma busca com valores decrescentes em $\gamma > 0$ permite determinar γ^* quando o TPBVP do Teorema 1 deixa de ter solução. Como consequência, tanto de acordo com Gabriel et al. (2016) quanto segundo o Teorema 1, o índice de desempenho (29) é negativo para $\gamma > \gamma^*$ e assume o valor zero para $\gamma = \gamma^*$.

Para o cálculo da norma $\mathcal{H}_2$, considera-se o sistema em (30) e o índice de desempenho descrito em (26). Neste caso, a equação (13) leva a

$$\dot{P}_i + F_i' P_i + P_i F_i + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j + C_i' C_i = 0 \quad (32)$$

a qual, considerando-se as mesmas funções quadráticas $V_i(\xi, t)$ e $v_i(\xi)$ anteriores, $\forall i \in \mathbb{K}$ e $\forall t \in [0, T)$, sujeitas às mesmas condições de contorno iniciais e finais, fornece o limitante superior para o índice de desempenho

$$\mathcal{J} \leq \sum_{i \in \mathbb{K}} \pi_{i0} \text{tr}(J_i' H_i' S_i H_i J_i), \quad (33)$$

onde π_{i0} , $i \in \mathbb{K}$, decorre da distribuição inicial da variável aleatória markoviana $\theta_0 \in \mathbb{K}$. É interessante observar que (31) se reduz a (32) quando o parâmetro $\gamma > 0$ é tomado arbitrariamente grande. Novamente, este resultado é idêntico ao obtido em Geromel e Gabriel (2015).

A partir dos casos particulares de cálculo das normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas híbridos markovianos descritos por (30), obtém-se os valores das normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ dos sistemas lineares com saltos markovianos (MJLS) clássicos, já exaustivamente estudados. De fato, considerando $H_i = I$, $\forall i \in \mathbb{K}$, as condições de contorno tornam-se, uma vez mais, idênticas a $P_i(0) = P_i(T) = S_i > 0$,

$\forall i \in \mathbb{K}$, fazendo com que o TPBVP admita a solução constante $P_i(t) \equiv S_i > 0$. Desta forma, como esperado, (13) reduz-se a equação algébrica de Riccati

$$F'_i P_i + P_i F_i + \gamma^{-2} P_i J_i J'_i P_i + \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} P_j + C'_i C_i = 0, \quad (34)$$

$\forall i \in \mathbb{K}$. A solução ótima γ^* é caracterizada por $\mathcal{J} = 0$, que corresponde ao resultado bastante conhecido, dado em Costa et al. (2013).

5 Conclusões

Este artigo propôs-se a apresentar uma formulação geral para os sistemas de controle amostrados, os quais são tratados como sistemas híbridos. A partir desta formulação e de forma inédita, condições necessárias e suficientes são propostas para a garantia da estabilidade em média quadrática ao mesmo tempo em que permitem o cálculo exato de um índice de desempenho de interesse. Este resultado mostra-se adequado para o projeto de controle ótimo amostrado. Além disso, a abordagem permite recuperar os casos clássicos e híbridos de sistemas LTI e MJLS, ratificando assim a teoria proposta. Trabalhos futuros englobam tanto a elaboração de um algoritmo que permita a solução das equações (13), sujeita às condições de contorno propostas pelo Corolário 1, quanto o desenvolvimento de técnicas de controle ótimo para o caso aqui tratado.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao “Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq” e à “Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP” pelo apoio financeiro a este projeto de pesquisa.

Referências

- Antsaklis, P., Stiver, J. A. e Lemmon, M. (1993). Hybrid system modeling and autonomous control systems, *Hybrid Syst.*, Springer, pp. 366–392.
- Bamieh, B., Pearson, J. B., Francis, B. A. e Tannenbaum, A. (1991). A lifting technique for linear periodic systems with applications to sampled-data control, *Systems Control Lett.* **17**(2): 79–88.
- Bellman, R. (1954). Dynamic programming and a new formalism in the calculus of variations, *Proc Natl Acad Sci U S A* **40**: 231–235.
- Boyd, S. P., Ghaoui, L. E., Feron, E. e Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Vol. 15 of *SIAM Stud. Appl. Math.*, SIAM, Philadelphia, PA.
- Branicky, M. (1995). Studies in hybrid systems: Modeling, analysis, and control, *Technical report*, DTIC Document.
- Colaneri, P., Geromel, J. C. e Locatelli, A. (1997). *Control Theory and Design: An RH_2 / RH_∞ Viewpoint*, Academic Press, London, UK.
- Costa, O. L. V., Fragoso, M. D. e Todorov, M. G. (2013). *Continuous-time Markov Jump Linear Systems, Probability and Its Applications*, Springer-Verlag, Berlin, DE.
- Gabriel, G., Geromel, J. e Grigoriadis, K. (2016). Optimal $\mathcal{H}_\infty$ state feedback sampled-data control applied to markov jump linear systems, *Proc. of 15th European Control Conference 2016*. Submitted.
- Gabriel, G. W. (2016). *Optimal Sampled-Data State Feedback Control applied to Markov Jump Linear Systems*, PhD thesis, UNICAMP, Campinas, SP.
- Geromel, J. C. e Gabriel, G. W. (2015). Optimal $\mathcal{H}_2$ state feedback sampled-data control design for markov jump linear systems, *Automatica* **54**: 182–188.
- Goebel, R., Sanfelice, R. G. e Teel, A. R. (2009). Hybrid dynamical systems, *IEEE Control Syst.* pp. 28–93.
- Hu, L.-S., Shi, P. e Frank, P. M. (2006). Robust sampled-data control for markovian jump linear systems, *Automatica* **42**: 2025–2030.
- Hu, L., Shi, P. e Huang, B. (2006). Stochastic stability and robust control for sampled-data systems with markovian jump parameters, *J. of Math. Anal. and Appl.* **313**(2): 504–517.
- Kirk, D. E. (1970). *Optimal Control Theory: An introduction*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ.
- Smears, I. (2011). Hamilton-jacobi-bellman equations analysis and numerical analysis, *Technical report*, University of Durham, Durham.
- Souza, M., Gabriel, G. W. e Geromel, J. C. (2014). Optimal sampled-data state feedback control of linear systems, *19th IFAC World Congress*, pp. 5556–5561.
- Tan, K. e Grigoriadis, K. M. (2000). State-feedback control of lqv sampled-data systems, *Math. Probl. Eng.* **6**(2–3): 145–170.
- Zhou, K., Doyle, J. C. e Glover, K. (1996). *Robust and Optimal Control*, Prentice-Hall, USA.