

PROJETO DE CONTROLADORES LQR-LMI COM RESTRIÇÃO DE TAXA DE DECAIMENTO E ESTABILIDADE ESTENDIDA

RODRIGO P. CAUN[†], EDVALDO ASSUNÇÃO^{*}, MARCELO C. M. TEIXEIRA^{*}, ALESSANDRO P. CAUN[‡]

^{*} *Lab de Pesquisa em Controle, Departamento de Engenharia Elétrica, Univ Estadual Paulista
Av. José Carlos Rossi, 1370, 15385-000, Ilha Solteira, São Paulo, Brasil
E-mails: edvaldo@dee.feis.unesp.br, marcelo@dee.feis.unesp.br*

[†] *Coordenação de Engenharia Eletrônica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Rua Cristo Rei, 19, 85902-490, Toledo, Paraná, Brasil
E-mail: rodrigocaun@utfpr.edu.br*

[‡] *União de Instituições Bonifacianas de Ensino - FJB
Avenida Joaquim Moreira da Silva, 3200, 15200-000, José Bonifácio, São Paulo, Brasil
E-mail: alessandrocaun@gmail.com*

Abstract— The aim of this work implicate the achievement of less conservative conditions in controllers design based on the linear quadratic regulator (LQR) in structure of linear matrix inequalities (LMIs) for continuous uncertain linear time-invariant systems, instating the decay rate (α) without the use of further LMIs. However, the tool used in the relaxation process of inequalities as polytopic linear differential inclusions matches to Finsler Lemma conditions, whose advantage is associated the decoupling between Lyapunov matrix and state feedback gain. Therefore it is possible the use of Lyapunov functions-dependent parameter in achievement of robust controllers. The presentation of results consist the practical application through implementation of the controllers in the helicopter 3-DOF of Quanser.

Keywords— Linear Quadratic Regulator, Linear Matrix Inequalities, Robust Control, Decay Rate, Finsler Lemma.

Resumo— O objetivo deste trabalho envolve a obtenção de condições menos conservadoras no projeto de controladores baseado no regulador linear quadrático (LQR) em estrutura de desigualdades matriciais lineares (LMIs) para sistemas lineares incertos contínuos e invariantes no tempo, integrando a taxa de decaimento (α) sem o uso de LMIs adicionais. Contudo, a ferramenta utilizada no processo de relaxamento das desigualdades na forma de inclusões diferenciais politópicas corresponde às condições do Lema de Finsler, cuja vantagem está associada ao desacoplamento da matriz de Lyapunov do ganho de realimentação de estados. Com isso é possível o uso de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros na obtenção de controladores robustos. A apresentação dos resultados compreende a aplicação prática através da implementação dos controladores no helicóptero 3-DOF de bancada da Quanser.

Palavras-chave— Regulador Linear Quadrático, Desigualdades Matriciais Lineares, Controle Robusto, Taxa de Decaimento, Lema de Finsler.

1 Introdução

Problemas de controle ótimo relacionados a índices de desempenho quadráticos têm sido exaustivamente explorados ao longo dos anos. Concomitantemente, alternativas na busca de soluções para esta classe de problemas tem sido desenvolvidas com sucesso por meio do uso de desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* - LMI), em especial, associando modelos de incertezas (Boyd et al., 1994; Polyak et al., 2014). Todavia, as limitações impostas através de restrições LMIs oportunizam a aplicação de técnicas de relaxação que permitam a ampliação das regiões de factibilidade ao custo do aumento das variáveis matriciais e, conseqüentemente, da complexidade computacional no cálculo destas soluções (Li et al., 2016; Huang et al., 2016; Apkarian et al., 2001).

Dentre as propostas aplicáveis, a mais difundida corresponde ao lema de Finsler (Boyd et al., 1994). Este resultado tem sido aplicado em teoria de controle a tempo contínuo e discreto baseado em estruturas de LMIs, relacionando vantagens interessantes em síntese de controladores, como por exem-

plo, desvinculando a matriz de Lyapunov do cálculo do ganho de realimentação de estados. Este fato é decisivo no aumento das regiões de factibilidade, pois permite o uso de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros no controle robusto (Buzachero et al., 2012; Castelan et al., 2006; Lee et al., 2007).

Complementarmente, os projetistas em sistemas de controle precisam delinear especificações de desempenho que norteiem o comportamento desejado dos sinais de saída, ou seja, posicionar os polos do sistema em malha fechada em sub-regiões do plano complexo-s. Tais condições podem ser facilmente incluídas por meio de restrições adicionais na forma de LMIs (Chilali and Gahinet, 1996; Hu et al., 2016). Entretanto, a desvantagem relacionada ao processo de alocação de polos envolve novo acréscimo da complexidade computacional. Assim, com o intuito de reduzir os sucessivos impactos no processamento do computador, deseja-se incorporar a taxa de decaimento na formulação original das LMIs (Qiu and Cao, 2016).

Ademais, este artigo propõe condições de estabilidade estendida via Lema de Finsler no projeto de reguladores lineares quadráticos (do inglês, *Linear Quadratic Regulator* - LQR) sob estrutura de desi-

gualdades matriciais lineares integrando em uma única LMI a taxa de decaimento (α), sujeito a inclusões diferenciais lineares politópicas. A validação teórica dos resultados é obtida via aplicação ao modelo do helicóptero 3-DOF da Quanser, evidenciando o êxito da proposta. No conhecimento dos autores esse é um resultado inédito.

O artigo está organizado da seguinte forma: A Seção 2 apresenta o desenvolvimento da proposta de controle LQR-LMI com relaxação via lema de Finsler integrando a α -estabilidade sem restrições adicionais, com posteriores desdobramentos a sistemas lineares invariantes no tempo sob incertezas politópicas. Na Seção 3 é apresentado um exemplo de aplicação demonstrando a eficiência da proposta.

A notação adotada neste artigo considera que para uma matriz $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, X' denota a transposição, X^{-1} denota a inversão, $X^\perp$ corresponde a uma matriz coluna que representa uma base para o espaço nulo e $X > 0$ ($X \geq 0$) implica que X é (semi-) definida positiva. Considera-se, ainda, que I denota a matriz identidade com dimensões apropriadas.

2 Resultado Principal

Considere o sistema linear invariante no tempo (do inglês, *Linear Time Invariant* – LTI) descrito por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (1)$$

com $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ o vetor de controle e $y(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de saída de performance. As matrizes A , B e C são matrizes reais e constantes de dimensões apropriadas. Assume-se, ainda, que o sistema é controlável e observável.

Tradicionalmente, em problemas de otimização que envolvem índices de desempenho quadráticos na função custo garantido é admissível definir descrições matemáticas na forma de LMIs aplicadas a sistemas de controle (Boyd et al., 1994). Entretanto, em diversos casos, formulações em termos de desigualdades matriciais precisam sofrer adequações que permitam a obtenção de características lineares diante de restrições não lineares. Além disso, em algumas situações é de extrema importância determinar resultados mais relaxados para as condições de restrições lineares com o intuito de produzir implicações menos conservadoras, contornando limitações físicas em aplicações a sistemas reais. Neste sentido, abaixo encontram-se os principais lemas utilizados no artigo.

Lema 1 (Complemento de Schur): Seja $Q(x) = Q(x)'$, $R(x) = R(x)'$, e $S(x)$ dependente de modo afim da variável x . Então a LMI

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)' & R(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (2)$$

é equivalente a desigualdade matricial,

$$R(x) > 0, Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)' > 0 \quad (3)$$

ou,

$$Q(x) > 0, R(x) - S(x)Q(x)^{-1}S(x)' > 0 \quad (4)$$

Prova: Vide (Boyd et al., 1994) para maiores detalhes.

Lema 2 (Lema de Finsler): Considere $w \in \mathbb{R}^{n_x}$, $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m_x \times n_x}$ com $\text{rank}(\mathcal{B}) < n_x$ e $\mathcal{B}^\perp$ uma base para o espaço nulo de $\mathcal{B}$ (ou seja, $\mathcal{B}\mathcal{B}^\perp = 0$). Então as condições a seguir serão equivalentes,

1. $w' \mathcal{L} w < 0, \forall w \neq 0; \mathcal{B} w = 0$
2. $\mathcal{B}^\perp' \mathcal{L} \mathcal{B}^\perp < 0$
3. $\exists \mu \in \mathbb{R}, \mathcal{L} - \mu \mathcal{B}' \mathcal{B} < 0$
4. $\exists \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n_x \times m_x}: \mathcal{L} + \mathcal{X} \mathcal{B} + \mathcal{B}' \mathcal{X}' < 0$

Prova: Vide (Skelton et al., 1997; Oliveira e Skelton, 2001) para maiores detalhes.

2.1 Controlador LQR-LMI com restrição da taxa de decaimento via Lema de Finsler

Considere o sistema (1) e assuma a lei de controle por realimentação de estados $u(t) = -Kx(t)$, com K uma matriz real e constante de dimensões apropriadas. Para determinar a estabilidade do sistema usando a relaxação do controlador LQR-LMI com restrição de α -estabilidade através do lema de Finsler é proposto a formulação do seguinte teorema.

Teorema 2.1 (LQR-LMI, α -estabilidade estendida): O sistema (1) é estável por $u(t) = -Kx(t)$, com taxa de decaimento maior ou igual a α , se, para um dado b , existirem matrizes $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $W = Y'PY \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $P = P' > 0$, tal que o seguinte problema de otimização convexo seja factível:

$$\min_{W=Y'PY > 0, Z, Y} \mu$$

sujeito a,

$$\begin{bmatrix} AY + BZ + Y'A' + Z'B' + 2\alpha W \\ W - Y' + bAY + bBZ \\ Y \\ Z \\ W - Y + bY'A' + bZ'B' & Y' & Z' \\ -bY - bY' & 0 & 0 \\ 0 & -Q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathcal{R}^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} \mu & x'(0) \\ x(0) & Y' + Y - W \end{bmatrix} \geq 0 \quad (6)$$

Assim, o ganho de realimentação de estados é representado por $K = -ZY^{-1}$.

Prova: Inicialmente, definem-se as seguintes variáveis de interesse, $w = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} (A - BK) & -I \end{bmatrix}$, $B^\perp = \begin{bmatrix} I \\ (A - BK) \end{bmatrix}$ e $\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 2\alpha P + K'RK + Q & P \\ P & 0 \end{bmatrix}$, com $n_x = 2n$, $m_x = n$ e $P = P' > 0$. Diante ao exposto, proceder-se-á o desenvolvimento das condições do Lema 2 (Lema de Finsler), conforme segue:

1. Se $\exists P = P' > 0$, tal que $w' \mathcal{L} w < 0$ então,

$$\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 2\alpha P + K'RK + Q & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} < 0 \quad (7)$$

ou,

$$x' P \dot{x} + \dot{x}' P x + 2\alpha x' P x < -x' (K'RK + Q)x \quad (8)$$

Adicionalmente, deve-se atender a condição $Bw = 0$, e, portanto,

$$\begin{bmatrix} (A - BK) & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \dot{x} = (A - BK)x \quad (9)$$

2. Se $\exists P = P' > 0$, tal que, $B^\perp \mathcal{L} B^\perp < 0$, ou,

$$\begin{bmatrix} I \\ (A - BK) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 2\alpha P + K'RK + Q & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ (A - BK) \end{bmatrix} < 0 \quad (10)$$

que, após manipulações algébricas, obtém-se

$$(A - BK)'P + P(A - BK) + 2\alpha P < -(K'RK + Q) \quad (11)$$

Neste ponto, observa-se que as condições 1 e 2 são satisfeitas, portanto, verifica-se também que,

4. Se $\exists \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{2n \times n}$, $P = P' > 0$, então,

$$\begin{bmatrix} 2\alpha P + K'RK + Q & P \\ P & 0 \end{bmatrix} + \mathcal{X} \begin{bmatrix} (A - BK) & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (A - BK)' \\ -I \end{bmatrix} \mathcal{X}' < 0 \quad (12)$$

Admitindo, $\mathcal{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$, define-se,

$$\begin{bmatrix} 2\alpha P + K'RK + Q & P \\ P & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1(A - BK) & -X_1 \\ X_2(A - BK) & -X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (A - BK)'X_1' & (A - BK)'X_2' \\ -X_1' & -X_2' \end{bmatrix} < 0 \quad (13)$$

ou, ainda,

$$\begin{bmatrix} X_1(A - BK) + (A - BK)'X_1' + 2\alpha P + K'RK + Q \\ P + X_2(A - BK) - X_1' \\ P - X_1 + (A - BK)'X_2' \\ -X_2 - X_2' \end{bmatrix} < 0 \quad (14)$$

Considere $X_1 = M$ e $X_2 = bM$ de forma a suprimir a dependência da síntese do controlador em função destas variáveis, então,

$$\begin{bmatrix} M(A - BK) + (A - BK)'M' + 2\alpha P + K'RK + Q \\ P + bM(A - BK) - M' \\ P - M + b(A - BK)'M' \\ -bM - bM' \end{bmatrix} < 0 \quad (15)$$

Agora, pré-multiplicando por $\begin{bmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{bmatrix}$ e pós-multiplicando por $\begin{bmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{bmatrix}'$, obtém-se a desigualdade (16). Em seguida, realizando as mudanças de variáveis $Y = (M')^{-1}$ e após, $Z = -KY$, e rearranjando, determina-se a desigualdade (17). Por fim, fazendo $W = Y'PY$, tem-se,

$$\begin{bmatrix} AY + BZ + Y'A' + Z'B' + 2\alpha W + Z'RZ + Y'QY \\ W - Y' + bAY + bBZ \\ W - Y + bY'A' + bZ'B' \\ -bY - bY' \end{bmatrix} < 0 \quad (18)$$

Aplicando o complemento de Schur à desigualdade acima, de forma a decompor os termos relacionados com $\mathcal{R}$ e Q , resulta em:

$$\begin{bmatrix} AY + BZ + Y'A' + Z'B' + 2\alpha W + Z'RZ \\ W - Y' + bAY + bBZ \\ Y \\ W - Y + bY'A' + bZ'B' \\ -bY - bY' \\ 0 \\ Y' \\ 0 \\ -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} AY + BZ + Y'A' + Z'B' + 2\alpha W \\ W - Y' + bAY + bBZ \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} (A - BK)(M')^{-1} + M^{-1}(A - BK)' + 2\alpha M^{-1}P(M')^{-1} + M^{-1}K'RK(M')^{-1} + M^{-1}Q(M')^{-1} \\ M^{-1}P(M')^{-1} - M^{-1} + b(A - BK)(M')^{-1} \\ M^{-1}P(M')^{-1} - (M')^{-1} + bM^{-1}(A - BK)' \\ -b(M')^{-1} - bM^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} AY + BZ + Y'A' + Z'B' + 2\alpha Y'PY + Z'RZ + Y'QY & Y'PY - Y + bY'A' + bZ'B' \\ Y'PY - Y' + bAY + bBZ & -bY - bY' \end{bmatrix} < 0 \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} W - Y + bY'A' + bZ'B' & Y' & Z' \\ -bY - bY' & 0 & 0 \\ 0 & -Q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0$$

sendo, $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \neq Y'$, $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $W = Y'PY$, $P = P' > 0$ e $K = -ZY^{-1}$.

Por outro lado, é possível definir a LMI da função objetivo do problema LQR, por:

$$\begin{bmatrix} \mu & x'(0) \\ x(0) & Y' + Y - W \end{bmatrix} \geq 0 \quad (21)$$

Neste caso, para a prova de suficiência, serão considerados os resultados de (Daafouz and Bernussou, 2001), sob a premissa que a condição acima é factível, e, portanto, $Y' + Y - W \geq 0$. Assim, dado que a matriz Y possui *rank* completo e como W é estritamente positiva definida, tem-se,

$$(W - Y)W^{-1}(W - Y)' \geq 0 \quad (22)$$

ou, equivalentemente, $YW^{-1}Y' \geq Y' + Y - W$. Desta forma satisfazendo,

$$\begin{bmatrix} \mu & x'(0) \\ x(0) & YW^{-1}Y' \end{bmatrix} \geq 0 \quad (23)$$

que, isolando os termos de pré-multiplicação $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix}$ e pós-multiplicação $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Y' \end{bmatrix}'$, obtém-se,

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu & x'(0)(Y')^{-1} \\ Y^{-1}x(0) & W^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Y' \end{bmatrix}' \geq 0 \quad (24)$$

Finalmente, aplicando o complemento de Schur,

$$x(0)'(Y')^{-1}WY^{-1}x(0) \leq \mu \quad (25)$$

e, realizando a mudança de variável entre W e P , tem-se:

$$x(0)'(Y')^{-1}Y'PY^{-1}x(0) \leq \mu \quad (26)$$

que corresponde a energia mínima de saída, ou seja, $x(0)'Px(0) \leq \mu$.

Conclui-se, portanto, que a inserção da variável de folga Y promove a ampliação da região de factibilidade do resultado proposto em (Caun, et. al. 2015).

Observação 1: Verifica-se, por meio de testes práticos, que a medida que o parâmetro b torna-se pequeno o suficiente ocorre uma ampliação da região de factibilidade em projetos de controladores obtidos pela relaxação via lema de Finsler (Silva, 2012). Desta forma, parametrizados pelos resultados apre-

sentados em (Silva, 2012), optou-se em adotar valores da ordem milésimal no projeto de controle.

A prova do Teorema 2.1 está concluída. $\square$

2.2 Controlador LQR-LMI e a α -estabilidade estendida sujeito incertezas politópicas

Considere o sistema linear a tempo contínuo, incerto e com incertezas invariantes no tempo, descrito pelas equações por representação em espaço de estados,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\delta)x(t) + B(\delta)u(t) \\ y(t) &= C(\delta)x(t) \end{aligned} \quad (27)$$

com as matrizes $(A, B, C)(\delta)$ não precisamente conhecidas e pertencentes a um conjunto convexo Ω tal que:

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(A, B, C)(\delta): (A, B, C)(\delta) \\ &= \sum_{i=1}^N \delta_i (A, B, C)_i, \delta \in \Delta_N\} \\ \Delta_N &= \left\{ \delta \in \mathbb{R}^N: \sum_{i=1}^N \delta_i = 1, \delta_i \geq 0, \right. \\ &\quad \left. i = 1, \dots, N \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

sendo que (A_i, B_i, C_i) são conhecidos como vértices do sistema e N o número de vértices do politopo.

Teorema 2.2 (LQR-LMI, α -estabilidade estendida): O sistema (25) é estável por $u(t) = -Kx(t)$ com taxa de decaimento maior ou igual a α , se, para um dado b , existirem matrizes $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $W_i = W_i' > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tal que as seguintes LMIs são verificadas:

$$\min_{W_i=W_i'>0, Z, Y} \mu$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} A_iY + B_iZ + Y'A_i' + Z'B_i' + 2\alpha W_i & & & \\ W_i - Y' + bA_iY + bB_iZ & & & \\ & Y & & \\ & Z & & \\ W_i - Y + bY'A_i' + bZ'B_i' & Y' & Z' \\ & -bY - bY' & 0 & 0 \\ & 0 & -Q^{-1} & 0 \\ & 0 & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix} \mu & x'(0) \\ x(0) & Y' + Y - W_i \end{bmatrix} \geq 0 \quad (30)$$

sendo o ganho de realimentação de estados dado por $K = -ZY^{-1}$.

Prova: Considere o simplex unitário, $\sum_{i=1}^N \delta_i = 1, \delta_i \geq 0$. Então, multiplicando (29) e (30) por δ_i , e

somando os índices de $i = 1$ à $i = N$, as LMIs (31) e (32) são obtidas.

$$\begin{bmatrix} A(\delta)Y + B(\delta)Z + Y'A(\delta)' + Z'B(\delta)' + 2\alpha W \\ W(\delta) - Y' + bA(\delta)Y + bB(\delta)Z \\ Y \\ Z \\ \Xi(\delta) \\ -bY - bY' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y' \\ Z' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -Q^{-1} \\ 0 \\ -R^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (31)$$

$$\begin{bmatrix} \mu & x'(0) \\ x(0) & Y' + Y - W(\delta) \end{bmatrix} \geq 0 \quad (32)$$

sendo $\Xi(\delta) = W(\delta) - Y + bY'A(\delta)' + bZ'B(\delta)'$. A partir das equações acima, a prova do teorema considerando o sistema linear incerto resume-se a prova do Teorema 2.1.

A prova do Teorema 2.2 está concluída. $\square$

3 Exemplo Numérico

Considere o modelo esquemático da Figura (1) do helicóptero com três graus de liberdade. Dois motores DC estão montados nas extremidades de uma haste retangular e acionam duas hélices propulsoras. Os eixos dos motores são paralelos entre si, sendo o vetor de empuxo normal em relação à haste (Quanser, 2002).

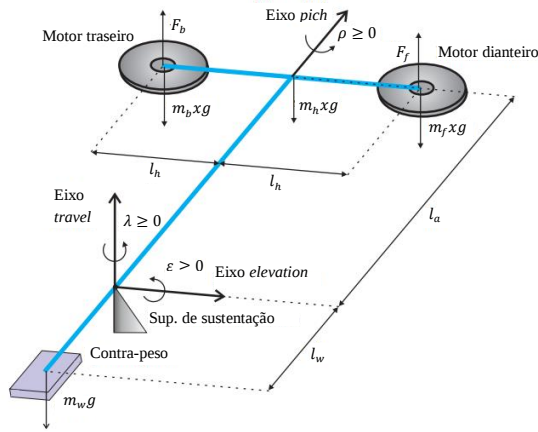


Figura 1. Modelo esquemático do Helicóptero 3-DOF (Quanser, 2002).

O braço é conectado por uma junta 2-DOF e é livre para inclinar e guinar. Na extremidade oposta do braço existe um contrapeso que torna a massa efetiva leve o suficiente para viabilizar que os motores levantem o helicóptero. Uma voltagem maior aplicada no motor dianteiro (V_f) causa uma inclinação positiva enquanto uma voltagem maior no motor traseiro (V_b) causa uma inclinação negativa (ângulo *pitch* (ρ)). Uma voltagem positiva nos dois motores causa uma elevação de todo o corpo (ângulo *elevation* (ε)) do braço. Se o corpo inclina, o vetor impul-

são resulta no deslocamento do corpo (ângulo *travel* (λ)) do braço).

O objetivo deste experimento é projetar um sistema de controle para rastrear e regular a elevação e o percurso do Helicóptero 3-DOF. A trajetória do helicóptero foi dividida em três estágios: (a) decolagem do helicóptero, subindo em $27,5^\circ$ de forma a buscar o ângulo elevação de $\varepsilon = 0^\circ$; (b) o helicóptero apresenta um percurso de 120° e (c) aterrissagem do helicóptero a posição inicial ($\varepsilon = -27,5^\circ \approx -0,48 \text{ rad}$) (Manesco et al., 2012).

Para a modelagem que consta no manual do fabricante, o vetor de estados $x(t)$, o vetor de entrada $u(t)$ e matrizes A , B_u e C são definidas por:

$$x(t) = [\varepsilon \quad \rho \quad \lambda \quad \dot{\varepsilon} \quad \dot{\rho} \quad \dot{\lambda} \quad \xi \quad \gamma]', \quad u(t) = \begin{bmatrix} V_f \\ V_b \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(2m_f l_a - m_w l_w)g}{2m_f l_a^2 + 2m_f l_h^2 + 2m_f l_w^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{l_a k_f}{m_w l_w^2 + 2m_f l_a^2} & \frac{l_a k_f}{m_w l_w^2 + 2m_f l_a^2} \\ \frac{1}{2} \frac{k_f}{m_f l_h} & -\frac{1}{2} \frac{k_f}{m_f l_h} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Os valores usados no projeto foram utilizados nos programas do MATLAB na implementação do projeto original do fabricante, para manter a fidelidade aos parâmetros, conforme tabela a seguir:

Tabela 1: Parâmetros do sistema (Quanser, 2002).

Parâmetros	Dimensões	Valor
k_f	-	0,1188
m_h	[kg]	1,15
m_w	[kg]	1,87
m_f	[kg]	$m_h/2$
m_b	[kg]	$m_h/2$
l_h	[m]	$7 \times 0,0254$
l_a	[m]	$26 \times 0,0254$
l_w	[m]	$18,5 \times 0,0254$
J_e	[kg.m ²]	0,91
g	[m/s ²]	9,81
m	[kg]	0,154

Para adicionar incerteza ao sistema do helicóptero, implementou-se uma queda de 50% da potência do motor da hélice traseira, através da inserção de uma chave temporizadora conectada a um amplificador com ganho de 0,5 diretamente na tensão

de atuação sobre o motor. Assim, constitui-se um politopo de dois vértices com uma incerteza na matriz de entrada do sistema do helicóptero. Desta forma, podem-se reescrever as matrizes do sistema na forma politópica por,

Vértice 1 (100% de potência no motor traseiro):

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,2304 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{u1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0858 & 0,0858 \\ 0,5810 & -0,5810 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vértice 2 (50% de potência no motor traseiro):

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,2304 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{u2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0858 & 0,0429 \\ 0,5810 & -0,2905 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Neste momento, propõem-se demonstrar a efetividade do processo de relaxamento relacionado ao lema de Finsler, ampliando a região de factibilidade do problema LQR-LMI sujeito a restrições de taxa de decaimento. Para tanto, a Figura (2) relaciona em seus eixos os valores crescentes entre o parâmetro α (valores inteiros) e a perda de potência proveniente da falha no atuador (constante k_{falha}), sendo $k_{falha} = 1,0$ o caso de nenhuma falha no atuador, exibindo uma análise comparativa das limitações de soluções associadas ao Teorema 2.2 e a apresentada em (Caun, et. al., 2015), considerando $b = 0,001$ na LMI (29). Informa-se, ainda, que pacote computacional LMILab e a interface YALMIP (Löfberg, 2004) em ambiente MATLAB foram usados para computar a solução do problema de otimização, adotando co-

mo matrizes de ponderação, $\mathcal{R} = 0,025 \cdot \text{diag}(1, 1)$ e $\mathcal{Q} = \text{diag}(100, 1, 10, 0,01, 0,01, 2, 10, 0,1)$.

A partir dos resultados obtidos nos testes computacionais de factibilidade do Teorema 2.2, é possível notar, conforme apresenta (Silva, 2012), que as LMIs que compõe o referido teorema mostram-se fortemente dependente do valor admitido para a constante b , ou seja, o sucesso do aumento da região de factibilidade é garantido selecionando-se valores apropriados desta constante. Adicionalmente, salienta-se que nos projetos factíveis obtidos pelo Teorema 2.2 contrastados aos resultados de (Caun, et.al., 2015) houve uma redução significativa no valor da norma dos controladores em todos os casos analisados, os quais encontram-se compilados na Figura (3) para o caso da taxa de decaimento utilizada na implementação prática. Observa-se, nesta figura, que para uma melhor visualização dos resultados optou-se por utilizar o eixo das ordenadas em escala logarítmica.

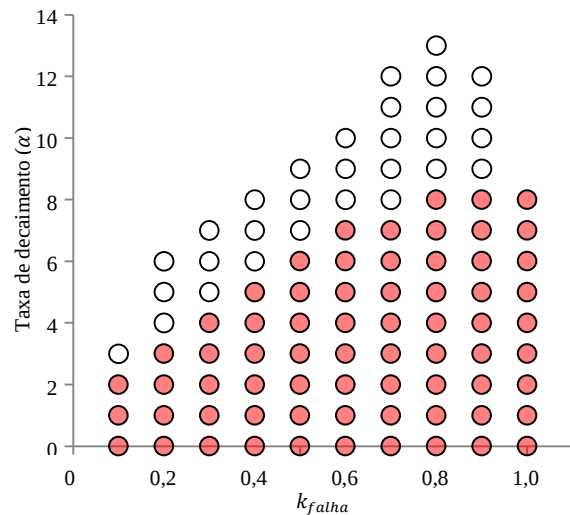


Figura 2. Regiões de factibilidade correspondente ao Helicóptero 3-DOF (○ : Teorema 2.2; ● : (Caun, et al., 2015)).

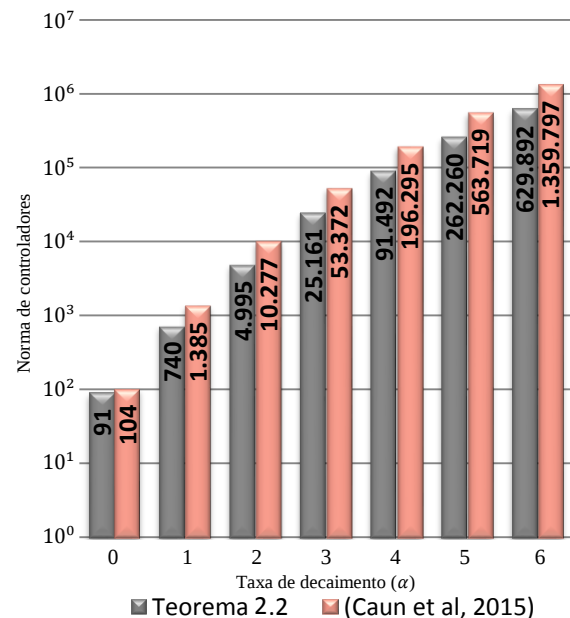


Figura 3. Análise comparativa entre as normas dos controladores impondo uma falha de 50% no ganho do controlador.

Não obstante, outro detalhe a ser pontuado com relação à Figura (2), envolve a factibilidade do ponto referente à incerteza em 30% ($k_{falha} = 0,7$) e taxa de decaimento $\alpha = 11$, no qual devido a condições de convergência numérica no processo de otimização obteve-se um resultado infactível. Diante deste fato, explorou-se uma região de proximidade através da consideração de $\alpha = 11,01$, que implicou na convergência do algoritmo para o Teorema 2.2, conforme esperado.

Agora, com o intuito de ilustrar o desempenho de controladores projetados a partir da proposta deste trabalho, buscou-se avaliar o comportamento das variáveis de estados (elevation (ε), pitch (ρ) e travel (λ)) e as respectivas tensões dos motores dianteiro e traseiro (compilados nas Figuras (4)-(5)), no qual considera uma falha de 50% na potência do motor da hélice traseira no instante de 30 s e que atenda a condição de $\|K\| \cong 120$.

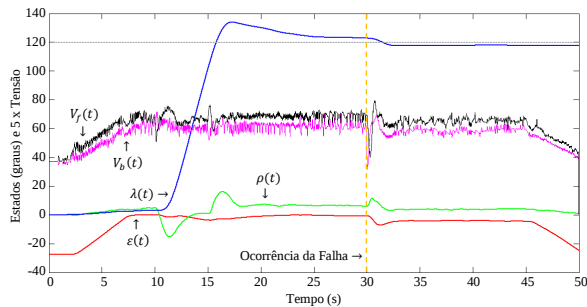


Figura 4. Comportamento dos três graus de liberdade ($\varepsilon, \rho, \lambda$) referente à implementação prática do controlador $K_{\alpha=0,04}$.

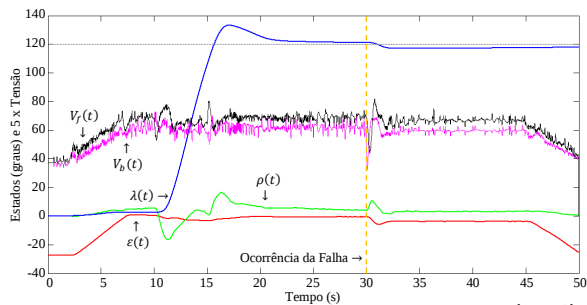


Figura 5. Comportamento dos três graus de liberdade ($\varepsilon, \rho, \lambda$) referente à implementação prática do controlador $K_{\alpha=0,19}$.

As soluções do problema de otimização convexa, caracterizada pelos vetores de ganho dos controladores e suas respectivas normas associadas aos valores da taxa de decaimento de $\alpha = 0,04$ (Caun et al, 2015) e $\alpha = 0,19$ (Teorema 2.2), utilizadas para compor os resultados das Figuras (4)-(5), são apresentados a seguir.

$$K_{\alpha=0,04} = \begin{bmatrix} 42,7591 & 42,3103 & -56,8488 & 16,3013 \\ 67,1585 & -32,3773 & 37,1384 & 43,9531 \\ 12,5088 & -64,4934 & 15,1064 & -9,1303 \\ -11,5655 & 44,5706 & 18,1135 & 5,7632 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\|K_{\alpha=0,04}\| = 119,3554$$

$$K_{\alpha=0,19} = \begin{bmatrix} 48,9026 & 37,6600 & -56,9663 & 22,2292 \\ 83,4299 & -29,6813 & 35,4670 & 47,8743 \\ 10,1719 & -59,4908 & 22,3521 & -16,5663 \\ -10,4048 & 40,4168 & 33,2814 & 9,8164 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\|K_{\alpha=0,19}\| = 119,7484$$

Observação 2: Dado que as variáveis de estado ξ e γ representam as integrais dos ângulos de ε e λ , ocorre que o sistema não alcança os valores nulos para estas variáveis de estados.

Comparando as Figuras (4)-(5) verifica-se que o Teorema 2.2 possibilitou um aumento da taxa de decaimento, proporcionando melhoras significativas em índices de desempenho, tais como o tempo de subida e de assentamento durante o intervalo de tempo de 0 a 30 segundos, sem arremeter drásticos níveis de tensão nos atuadores, confirmado por meio dos sinais $V_f(t)$ e $V_b(t)$. Além disso, é notável que após a imposição da falha na potência do motor da hélice traseira, o controlador $K_{\alpha=0,19}$ reduziu sensivelmente os níveis de tensão do motor dianteiro e a perda de altitude do protótipo durante o período transitório, quando contrastados aos resultados do controlador $K_{\alpha=0,04}$.

Por fim, é possível inferir que a proposta oferecida no Teorema 2.2 garante uma expansão dos limites de factibilidade em problemas de otimização convexa e proporciona uma redução da complexidade computacional através da redução de linhas de LMIs (através da incorporação da taxa de decaimento, sem a necessidade de impor LMIs adicionais) em problemas que possuem desvantagens matemáticas severas inerentes às características de exponenciais crescentes que ocorrem com o aumento das incertezas em inclusões diferenciais do tipo politópicas. Ademais, existem implicações negativas que estão diretamente relacionadas aos esforços dos sinais de controle que se intensificam à medida que aumenta-se a taxa de decaimento (α).

Observação 3: Notoriamente as propostas de projeto discutidas neste trabalho são realizadas de forma off-line. Contudo, problemas de escala industrial precisam ser mitigados de forma rápida, sejam por motivos econômicos ou por motivos de segurança na operação de processos, por exemplo. Neste caso, à medida que o número de parâmetros incertos da planta aumenta, o tempo computacional para a busca de soluções factíveis cresce exponencialmente na descrição politópica, causando severos atrasos na implementação de um controlador que atenda as novas condições de projeto. Além disso, verifica-se que as dimensões do modelo matemático da planta industrial causam, também, impactos negativos no processamento do computador. Estes fatos motivam a aplicação de técnicas que promovam soluções em tempo real com menor complexidade de processamento, como a redução do número de linhas de LMIs a serem programadas.

4 Conclusão

Neste trabalho são propostas condições menos conservadoras no tratamento de síntese de controladores LQR em estrutura de LMIs com imposição de restrições de taxa de decaimento, obtidas pelo uso do lema de Finsler e funções de Lyapunov dependentes de parâmetros, considerando inclusões diferenciais politópicas. A contribuição original considerou a expansão das regiões de factibilidade e a redução da complexidade computacional através da incorporação da α -estabilidade sem uso de LMIs adicionais, característica almejada considerando as limitações práticas neste modelo de incerteza.

Agradecimentos

A FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo), através do Projeto Temático 2011/17610-0, ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) e CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo apoio a esse trabalho.

Referências Bibliográficas

- Apkarian, P.; Tuan, H. D. and Bernussou, J. (2001). Continuous-time analysis, eigenstructure assignment, and H_2 synthesis with enhanced linear matrix inequalities (LMI) characterizations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 46 (12), p. 1941–1946.
- Boyd, S.; Ghaoui, L.; Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). Linear matrix inequalities in system and control theory. Volume 15 of *Studies in Applied Mathematics*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA.
- Buzachero, L. F. S.; Assunção, E.; Teixeira, M. C. M.; Silva, E. R. P. da (2012). New techniques for optimizing the norm of robust controllers of polytopic uncertain linear systems. In: SERRA, G. L. de O. (Ed.) *Frontiers in advanced control systems*. Rijeka, Croatia: InTech, p. 75-100.
- Castelan, E. B.; Tarbouriech, S.; Gomes da Silva Jr, J. M. e Queinnec, I. (2006). $\mathcal{L}_2$ -Stabilization of continuous-time linear systems with saturating actuators. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 16: 935–944.
- Caun, R. P.; Assunção, E.; Lins, L. I. H. e Teixeira, M. C. M. (2015). Controlador LQR via aproximação LMI com restrição de taxa de decaimento aplicado ao helicóptero 3-DOF de bancada. XII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, SBAI 2015, Natal – RN.
- Chilali, M. and Gahinet, P. (1996). H_∞ design with pole placement constraints: an LMI approach. *Automatic Control, IEEE Transactions on*. 41(3): 358–367.
- Daafouz, J and Bernussou, J. (2001). Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with varying parametric uncertain. *Systems & Control Letters. Elsevier Science*. 43(2001): 355-359.
- Hu, H.; Jiang, B.; Yang, H. and Shumsky, A. (2016). Non-fragile reliable D-stabilization for delta operator switched linear systems. *Journal of the Franklin Institute. Elsevier Science*. 353(2016): 1931-1956.
- Lee, S. M.; Park, J. H., Ji, D. H. and Won, S. C. (2007). Robust model predictive control for LPV systems using relaxation matrices. *IET Control Theory Appl on*. 1(6): 1567–1573.
- Li, Z.; Chang, X., Yu, L. (2016). Robust quantized filtering for discrete-time uncertain systems with packet dropouts. *Applied Mathematics and Computation*, vol. 275, p. 361–371.
- Löfberg, J. (2004). YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB, *Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design, Taipei, Taiwan*, pp. 284–289.
- Manesco, R. M.; Silva, J. H. P.; Moreira, M. R.; Buzachero, L. F. S.; Da Silva, E. R. P.; Assunção, E.; Teixeira, M. C. M. e Galvão, R. K. H. (2012). Estabilidade robusta $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas lineares: Uma implementação em um helicóptero 3-DOF de bancada. XIX Congresso Brasileiro de Automação, CBA 2012, Campina Grande, BR.
- Oliveira, M. C. & Skelton, R. E. (2001). *Perspectives in robust control*, 1st edn, Springer Berlin / Heidelberg, Berlin, chapter Stability tests for constrained linear systems, pp. 241–257.
- Polyak, B.T., Khlebnikov, M.V. and Shcherbakov, P.S. (2014). Control of linear systems under internal disturbances. The LMI technique. LENAND, Moscow.
- Qiu, F. and Cao, J. (2016). Exponential stability and -Gain analysis for sampled-data control of linear systems. *Journal of the Franklin Institut*, Published by Elsevier, 353: 462–477.
- Quanser (2002). 3-DOF helicopter reference manual. http://www.quanser.com/english/html/product_s/fs_product_challenge.asp?lang_code=english&pcat_code=exp-spe&prod_code=S1-3dofheli&tmpl=1.
- Silva, E. R. R. Controle de sistemas lineares incertos via realimentação derivativa utilizando funções de Lyapunov dependentes de parâmetros. 2012.126 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, nov. 2012.
- Skelton, R. E., Iwasaki, T. E. and Grigoriadis, K. (1997). *A unified algebraic approach to control design*, Taylor & Francis, Bristol.
- Huang, Y., Fu, S. and Shen, Y. (2016). Finite-time control for one-sided Lipschitz systems with auxiliary matrices, *Neurocomputing*, vol. 194, p. 207-217.