

Análise Numérica do Processo de Infiltração de Água num Sistema de Cobertura com Barreira Capilar

Karla Baeta E Souza
UFOP, Ouro Preto, Brasil, karla.baeta@yahoo.com.br

Christianne de Lyra Nogueira
UFOP, Ouro Preto, Brasil, chris@em.ufop.br

Daniel Miller Armond
UFOP, Ouro Preto, Brasil, danielmullerarmond@hotmail.com

RESUMO: O processo de fluxo em meio poroso não saturado é um fenômeno que está presente na engenharia de minas e seu estudo tem grande importância na prevenção de drenagem ácida de minas que está associada à exposição de estéril e rejeitos de mineração às condições ambientais. Neste trabalho são apresentados alguns estudos numéricos, com base nos métodos das diferenças finitas e dos elementos finitos, de sistemas de coberturas, modelados como um meio poroso homogêneo e estratificado, sujeitos ao processo de infiltração adotando o modelo exponencial e o de van Genuchten. Uma boa concordância é observada entre os resultados obtidos pelo método das diferenças finitas e dos elementos finitos. Os resultados apresentados neste trabalho, tanto pelo MDF quanto pelo MEF, mostram a potencialidade destes métodos na obtenção de uma resposta, ainda que aproximada, para o problema da infiltração de água em meios porosos não saturados e estratificados. Vários arranjos podem ser feitos facilmente auxiliando o engenheiro na escolha do material e da espessura das diferentes camadas que irão constituir o sistema de cobertura.

PALAVRAS-CHAVE: Método das diferenças finitas, Método dos elementos finitos, Meio não saturado, Fluxo transiente, Sistemas de cobertura.

1 INTRODUÇÃO

Conhecer o processo de infiltração de água através dos perfis de solo é de grande importância em diversas áreas da ciência da natureza. Na engenharia de minas este processo tem grande importância na prevenção de drenagem ácida de minas que está associado à exposição de estéril e rejeitos de mineração às condições ambientais. Neste caso o conhecimento científico é utilizado para a definição de sistemas de cobertura que têm como objetivo minimizar a passagem de água e oxigênio para o interior do resíduo (Souza, 2015). Estes sistemas são dimensionados considerando a ocorrência de um fluxo unidimensional descendente através de um meio

parcialmente saturado cujas propriedades variam no tempo na medida em que a frente de saturação avança ao longo da camada.

A equação diferencial que governa o fluxo unidimensional em meio poroso homogêneo e não saturado é conhecida como equação de Richard (Freeze e Cherry, 1979) e sua solução envolve integração no espaço e no tempo. Além disto, este problema apresenta uma não linearidade constitutiva em virtude da variação dos parâmetros hidráulicos com o nível de saturação. No caso dos sistemas de cobertura tem-se ainda a dificuldade do processo de fluxo ocorrer num meio estratificado com diferentes tipos de materiais.

Diante de tanta dificuldade, a obtenção de soluções aproximadas a partir da adoção de

algum método numérico, tal como o método das diferenças finitas e dos elementos finitos, se torna imprescindível.

Neste trabalho são apresentados estudos numéricos, com base nos métodos das diferenças finitas e dos elementos finitos, de sistema de coberturas adotando o modelo exponencial (Srivastava e Yeh, 1991) e o de van Genuchten (van Genuchten, 1980) para as curvas características (de retenção e de condutividade hidráulica).

2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

A Equação (1) representa a equação de Richard para fluxo unidimensional em meios porosos não saturados, escrita em termos da carga hidráulica de pressão, h_p , (Nogueira et al, 2014):

$$k \left(\frac{dh_p}{dz} \right) \left(1 + \frac{dh_p}{dz} \right) + k \frac{d^2 h_p}{dz^2} = C \frac{dh_p}{dt} \quad (1)$$

em que k é a condutividade hidráulica do meio definida pela curva de condutividade hidráulica $k = k(h_p)$, k' indica a variação da condutividade hidráulica com a carga hidráulica de pressão, θ é o teor de umidade volumétrica e C é a capacidade de retenção de água definida pela tangente à curva de retenção $\theta = \theta(h_p)$. A capacidade de retenção de água indica a variação do teor de umidade volumétrica com a variação da carga hidráulica de pressão.

Vários modelos constitutivos têm sido propostos para representar da melhor forma possível as curvas características do material tais como o modelo exponencial e o de van Genuchten, que serão utilizados no presente trabalho.

O modelo exponencial proposto por Srivastava e Yeh (1991) define funções exponenciais tanto para a condutividade hidráulica (k) quanto para o teor de umidade volumétrica (θ). São elas:

$$\theta(h_p) = \theta_r + (\theta_s - \theta_r) e^{\alpha h_p} \quad (2)$$

$$k(h_p) = k_s e^{\alpha h_p} \quad (3)$$

em que α é um parâmetro que varia de acordo com o tipo de solo e representa a taxa de redução do teor de umidade volumétrica à medida que a carga de pressão diminui; θ_r e θ_s são os teores de umidade volumétrica residual e saturado, respectivamente; e, k_s é a condutividade hidráulica saturada

De acordo com o modelo de van Genuchten (1980) as seguintes relações são definidas para as curvas de retenção e de condutividade hidráulica:

$$\theta(h_p) = \theta_r + (\theta_s - \theta_r) \theta_e \quad (4)$$

$$k(h_p) = k_s (\theta_e)^{0.5} (\theta_m)^2 \quad (5)$$

em que

$$\theta_e = \left(1 + |\alpha_{vg} h_p|^n \right)^{-m} \quad (6)$$

$$\theta_m = 1 - \left[1 - \theta_e^{(1/m)} \right]^m \quad (7)$$

$$m = 1 - 1/n \quad (8)$$

onde α_{vg} e n são parâmetros a serem ajustados de acordo com o solo.

A solução da equação de Richard, Equação (1), deverá atender às condições de contorno que podem ser em carga e pressão prescrita ($\bar{h}_p$):

$$h_p(z_1, t) = \bar{h}_p \quad (9)$$

ou em fluxo prescrito ($\bar{v}$)

$$\left(\frac{dh_p}{dz} \right)_{z=z_2} = -(\bar{v}/k+1) \quad (10)$$

onde z_1 e z_2 são, respectivamente, as coordenadas da base e do topo do sistema. A Equação (1) deverá atender ainda à seguinte condição inicial:

$$h_p(z,0) = \bar{h}_{p0}(z) \quad (11)$$

A solução da Equação (1) envolve uma integração no tempo e no espaço. Com relação ao tempo adota-se uma marcha incremental dividindo-se o tempo de análise em incrementos finitos de tempo, Δt . O tipo de marcha no tempo é definido pelo parâmetro β de tal modo que para $\beta=0,0$ tem-se um algoritmo explícito, para $\beta=1,0$ tem-se um algoritmo puramente implícito e para $\beta=0,5$ tem-se um algoritmo implícito de Crank- Nicholson.

Com relação ao espaço algum esquema de discretização pode ser adotado. No método das diferenças finitas (MDF) o domínio é discretizado em pontos nodais onde as derivadas da equação diferencial são aproximadas por equações em diferenças. No método dos elementos finitos (MEF) o domínio é discretizado em elementos finitos onde a equação de governo deve ser atendida é aplicada.

É importante destacar que, no caso da aplicação do MDF para um meio estratificado, a condição de continuidade de fluxo nas interfaces entre cada camada deve ser introduzida como mais uma equação a ser resolvida. No caso do MEF esta equação adicional não é necessária.

Embora tenham base numérica completamente distinta, a aplicação dos dois métodos conduz ao seguinte sistema de equação algébrico:

$$A^1 h_p^1 = A^0 h_p^0 + D \quad (12)$$

em que h_{p1} e h_{p0} representam os vetores de carga hidráulica de pressão nodais nos instantes $t+\Delta t$ e t , respectivamente, no final e no início de um dado incremento de tempo Δt .

No caso do MDF, A^1 e A^0 são matrizes tri-diagonais que dependem das propriedades materiais (Nogueira et al, 2014). No caso do MEF, as matrizes A^1 e A^0 representam o arranjo global das matrizes elementares de fluxo e de capacidade de retenção de água. (Machado Jr., 2000). O vetor D é o vetor que contém as condições de contorno em fluxo prescrito.

3 APLICAÇÃO

As análises deste trabalho foram realizadas nos programas INFILTRA_MDF desenvolvido com base no método das diferenças finitas (Souza e Nogueira, 2014) e no programa ANLOG desenvolvido com base no método dos elementos finitos (Cordeiro et al, 2014).

A primeira análise realizada consiste no processo de infiltração, devido a um fluxo prescrito de 0,009 m/h no topo da camada superior de um perfil de solo estratificado constituído por duas camadas de 1m de espessura. A base da camada inferior é considerada como um contorno drenante ($h_p(t)=0$).

O modelo constitutivo utilizado foi o modelo exponencial. As camadas são constituídas por materiais com mesma curva de retenção, porém com condutividades hidráulicas saturadas diferentes. Os seguintes parâmetros do modelo exponencial foram adotados: $\alpha=10,0 \text{ m}^{-1}$; teor de umidade volumétrica residual de 0,06 e teor de umidade volumétrica saturada de 0,40. A condutividade hidráulica saturada (k_s) da camada inferior (Material 1) igual a 0,01 m/h e da camada superior (Material 2) dez vezes maior (0,10 m/h).

As soluções numéricas foram obtidas utilizando-se uma malha de diferenças finitas constituída por 202 pontos nodais ($\Delta z=0,01 \text{ m}$). No caso do método dos elementos finitos foi adotada uma malha de elementos finitos constituída por 100 elementos quadrangulares lineares (Q4). Em ambas as análises foram adotadas uma discretização temporal implícita ($\beta=1,0$), considerando-se um tempo de análise final de 100 horas, suficiente para se alcançar o regime permanente do processo de fluxo, e um incremento de tempo (Δt) de 0,10 h.

A Figura 1 apresenta a distribuição espacial ao longo do tempo da carga hidráulica de pressão obtida numericamente, pelo MDF e MEF, e analiticamente (Srivastava e Yeh, 1991) a partir da distribuição inicial apresentada nesta figura. Observa-se uma boa concordância entres os três resultados.

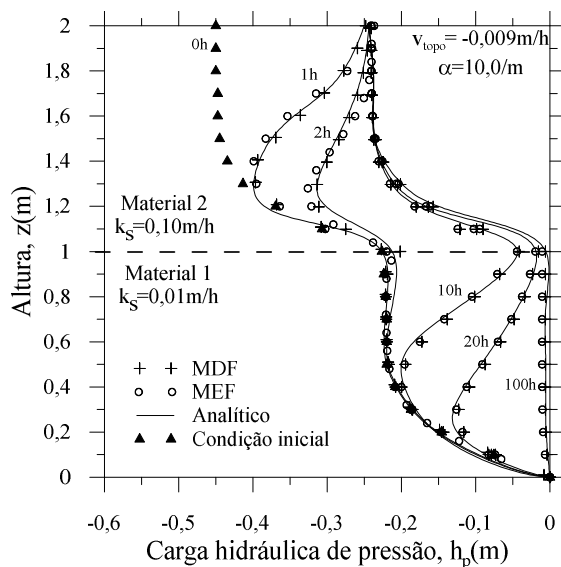


Figura 1. Evolução no tempo da distribuição espacial da carga hidráulica de pressão durante processo de infiltração.

Na medida em que a frente de umedecimento alcança o topo da camada inferior (menos permeável), a carga hidráulica de pressão na interface das camadas cresce rapidamente, Figura (1). Assim que a velocidade de fluxo na interface das duas camadas atinge uma magnitude da ordem de grandeza da condutividade saturada da camada inferior, observa-se uma rápida evolução da frente de umedecimento conduzindo à completa saturação da camada inferior.

A segunda análise realizada trata do processo de infiltração no mesmo perfil estratificado da análise anterior, no entanto, considerando uma distribuição inicial de carga hidráulica de pressão correspondente à condição estacionária do processo de infiltração devido a um fluxo prescrito no topo da camada superior de 0,001 m/h a partir de uma distribuição inicial de carga hidráulica total nula. Neste caso, os parâmetros do modelo exponencial foram mantidos, exceto o expoente α que foi reduzido em 10 vezes ($\alpha=1,0 \text{ m}^{-1}$).

A Figura (2) apresenta a evolução no tempo da distribuição de carga hidráulica de pressão ao longo das camadas de solo para um fluxo prescrito de 0,009 m/h por um período de 100 horas. Observa-se, neste arranjo em que a camada superior é constituída pelo material mais permeável, um aumento progressivo da

carga hidráulica de pressão na interface entre as camadas facilitando assim o processo de saturação da camada inferior. Esta situação não é a situação desejada para um sistema de cobertura.

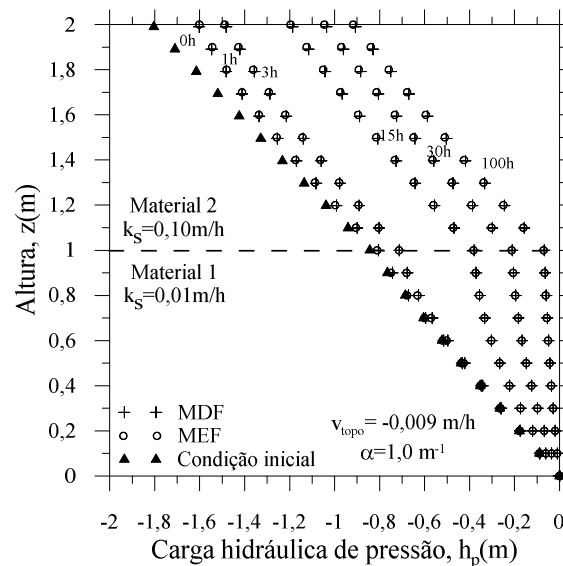


Figura 2 - Camada superior com Material 2

A terceira análise foi realizada invertendo-se o material das duas camadas. Ou seja, considerando a camada superior constituída pelo material menos permeável. Os resultados podem ser observados na Figura (3).

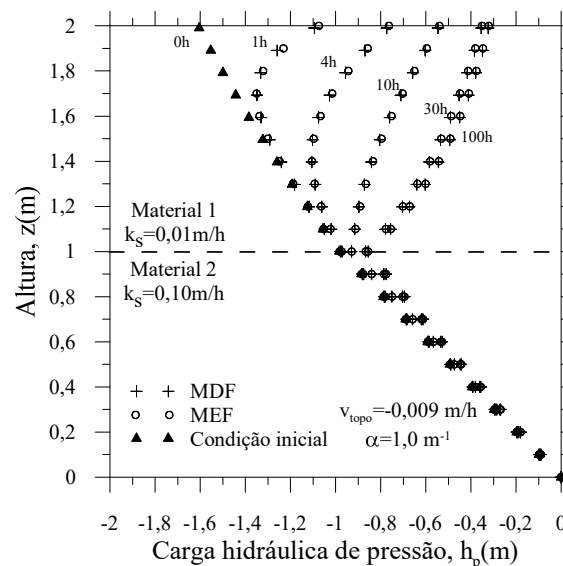


Figura 3. - Camada superior com Material 1

Tal como pode ser observado na Figura

(3), a magnitude da carga hidráulica de pressão na interface entre as camadas varia muito pouco. Consequentemente, tem-se uma redução do fluxo para a camada inferior. A camada superior funciona como a camada de armazenamento-e-liberação e a camada inferior como a camada de barreira capilar. Este é o princípio a ser adotado no projeto de sistemas de cobertura.

Nas Figuras (2) e (3) observa-se uma ótima concordância entre os resultados numéricos obtidos pelo MDF e MEF.

A última análise realizada tem como objetivo observar o desempenho de um sistema de cobertura constituído pelas duas camadas de solo indicadas na Figura (3), no entanto, sujeitas a uma variação da condição de contorno prescrita em fluxo no topo da camada superior correspondente à média anual da precipitação numa dada região de Paracatu/MG, durante quatro anos tal como indicado na Tabela 1.

Tabela 1. Taxa de precipitação anual – Paracatu /MG

Período	Precipitação média (m/h)
01/01/2012 a 31/12/2012	0,000054
01/01/2013 a 31/12/2013	0,000084
01/01/2014 a 31/12/2014	0,000027
01/01/2015 a 31/12/2015	0,000022

Fonte: Instituto Nacional de Meteorologia (INMET)

Usando-se os dados da curva de retenção do modelo exponencial adotados na terceira na terceira análise foi gerada uma curva de retenção teórica que por sua vez foi usada para obtenção dos parâmetros do modelo van Genuchten usando-se uma técnica de programação matemática tal como sugerido por Nascimento e Nogueira (2010). Os parâmetros encontrados são apresentados na Tabela 2, enquanto as curvas de retenção e condutividade hidráulicas são apresentadas na Figura 4.

Tabela 2. Parâmetros do modelo de van Genuchten.

θ_s	θ_r	$\alpha_{vg} (m^{-1})$	n
0,40	0,06	-2,41	2,71

As Figuras (5) e (6) apresentam o resultado da análise com o modelo de van Genuchten em termos, respectivamente, da distribuição espacial da carga hidráulica de

pressão e do teor de umidade volumétrica ao longo das camadas de solo para os instantes de tempo correspondentes aos instantes finais de cada ano (t_1 , t_2 , t_3 e t_4).

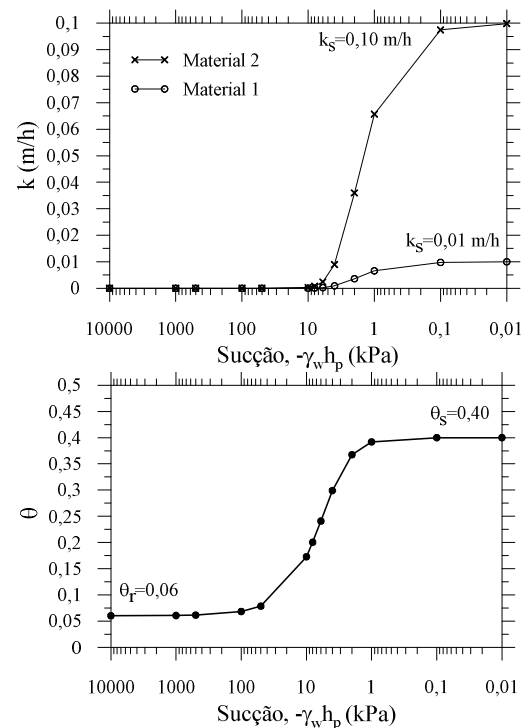


Figura 4. Curvas características.

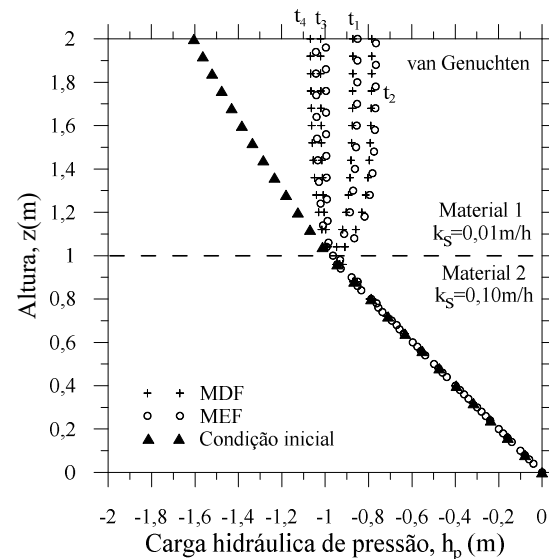


Figura 5. Distribuição espacial da carga hidráulica de pressão - Modelo de van Genuchten

De acordo com a Figura (6) verifica-se uma variação em torno de 15%, na superfície do terreno, no teor de umidade volumétrica em

relação à distribuição inicial. Ao longo dos 4 anos de análise não foi verificada uma variação significativa na interface entre as camadas. As respostas obtidas pelo MDF coincidem com as obtidas pelo MEF.

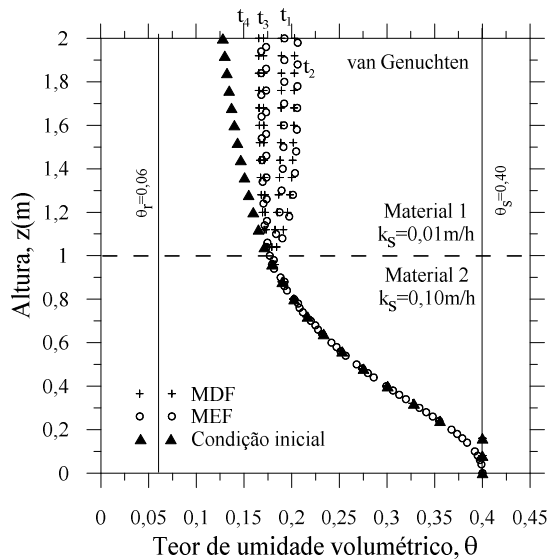


Figura 6. Distribuição espacial do teor de umidade volumétrica - Modelo de van Genuchten.

A quantidade de água armazenada na camada superior durante o período analisado, não foi suficiente para provocar uma variação na condição de saturação na interface entre as camadas. O grau de saturação ($S=\theta/\theta_s$) na interface entre as camadas se manteve em torno de 46% ao longo do período analisado. Este resultado aprova o uso deste perfil como uma barreira capilar.

4 CONCLUSÕES

Os resultados apresentados neste trabalho, tanto pelo MDF quanto pelo MEF, mostram a potencialidade destes métodos na obtenção de uma resposta, ainda que aproximada, para o problema da infiltração de água em meios porosos não saturados e estratificados. Vários arranjos podem ser feitos facilmente auxiliando o engenheiro na escolha do material e da espessura das diferentes camadas que irão constituir o sistema de cobertura.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à UFOP, à Fundação Gorceix, ao CNPq, à CAPES e à FAPEMIG pelo auxílio financeiro recebido para o desenvolvimento dos projetos de pesquisas associados a este trabalho.

REFERÊNCIAS

- Cordeiro, C.S.; Armond, D.M. e Nogueira, C.L. (2014). *Análise via MEF de problemas de fluxo em meio poroso não saturado*. Relatório Técnico-Científico Final, PIBIC/CNPq. UFOP.
- Freeze, R.A. e Cherry, J.A. (1979) *Groundwater*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- INMET. INSTITUTO NACIONAL DE METEOROLOGIA. [HTTP://WWW.INMET.GOV.BR/](http://www.inmet.gov.br/) ACESSO EM 20 DE ABRIL DE 2016.
- Machado Jr, J. C. (2000). *Análise de Problemas de Fluxo em Meio Poroso não Saturado pelo Método dos Elementos Finitos*. Dissertação (Mestrado) Departamento de Engenharia Civil, PROPEC, UFOP, 120f.
- Nascimento, S.C. e Nogueira, C.L., 2010. *Determinação automática de parâmetros constitutivos de modelos para problemas de fluxo em meio poroso não saturado*. Relatório Técnico-Científico Final PIP/2009-2010. Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 36f.
- Nogueira, C.L.; Souza, K.B.; Armond, D.M.; Cordeiro, C.S. e Souza, A.B.M. (2014). Modelagem numérica de problemas de fluxo não saturado em sistemas de cobertura. CILAMCE 2014 - XXXV Iberian-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Fortaleza/CE, Vol. 1, p. 1-13.
- Souza, K. B. (2015). *Modelagem numérica de problemas de fluxo não saturado em sistemas de cobertura*. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia de Minas) - Departamento de Engenharia de Minas, Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, 58f.
- Souza, K.B. e Nogueira, C.L. (2014). *Modelagem numérica via MDF da infiltração de água em meios porosos*. Relatório Técnico-Científico Final PROBIC/FAPEMIG. Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 50f.
- Srivastava, R. e Yeh, T-C.J. (1991). Analytical Solutions for One-Dimensional, Transient Infiltration Toward the Water Table in Homogeneous Layered Soils, *Water Resources Research*, Vol. 27(5), 753-726.
- van Genuchten, M.T (1980). A Closed Form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils, *Soil Science Society of America Journal*, Vol. 44, 892-898.