

Análise Limite por Otimização Cônica

Victor Ernesto Alejo Juscamayta

Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brasil, victor.alejo@ufpe.br

Ivaldo Dario Da Silva Pontes

Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brasil, ivaldo@ufpe.br

RESUMO: Em geomecânica, a análise limite fornece um método útil para avaliar a capacidade das estruturas como estabilidade de taludes e escavações. Neste trabalho apresenta-se a simulação numérica por elementos finitos do teorema cinemático (ou limite superior) e o teorema misto da análise limite em conjunto com a otimização cônica de segunda ordem. Usando-se elementos triangulares – quadráticos (6-nós) para as velocidades e lineares para as tensões (3-nós) em estado de deformação plana para materiais de Drucker-Prager.

PALAVRAS-CHAVE: Análise Limite, Formulação Variacional, Programação Cônica.

1 INTRODUÇÃO

O objetivo da Análise Limite é determinar o carregamento que irá causar o fenômeno do colapso plástico incipiente em um corpo constituído por material elástico idealmente plástico. Este fenômeno é caracterizado pelo desenvolvimento de deformações crescentes continuamente sob carregamento constante. Inicialmente a análise limite foi formulada como um problema de programação linear, resolvido através do método simplex. Para conseguir transformar a análise limite em um problema de programação linear é necessário linearizar a função de plastificação. O uso da linearização e do simplex tornavam o programa lento. Posteriormente, alguns autores utilizaram programas altamente especializados com o recente método de ponto interior e conseguiram velocidades muito melhores que o do simplex. Paralelamente, os algoritmos de ponto interior foram utilizados em programação não linear, o que evita a linearização da função de escoamento e do método simplex. Os resultados com a formulação não linear se mostraram mais rápidos e mais robustos. Mais recentemente alguns autores desenvolveram formulações e algoritmos de ponto interior, auto-dual, para restrições de matrizes semidefinidas e restrições cônicas. Com esta formulação se torna

desnecessário o cálculo de gradientes e dos hessianos da função de escoamento, evitando problemas de singularidades na função de escoamento.

Trabalhos mais recente como o de Makrodimitopoulos, A. & Martin (2006) estudaram o limite inferior da análise limite via otimização cônica, posteriormente eles apresentaram os limites superiores Makrodimitopoulos, A. & Martin (2007). Neste trabalho serão apresentadas as simulações numéricas das formulações variacionais da análise limite para os teoremas cinemático ($v6 - UB$) e misto ($\sigma3 - v6$) da análise limite com otimização cônica (Juscamayta, 2016). As formulações variacionais serão discretizadas através da técnica dos elementos finitos, que resultará nas formulações cinemática e mista discretas. Finalmente, o problema da análise limite e otimização cônica na forma de programação cônica de segunda ordem (SOCP) será resolvido através do algoritmo do ponto interior. Serão apresentadas também aplicações em estabilidade de taludes para taludes de 40° e 60° de inclinação.

2 OTIMIZAÇÃO CÔNICA DE SEGUNDA ORDEM

O cone de segunda ordem (SOC) em $\mathbb{R}^n$ é um

conjunto não vazio normado com a norma euclidiana será representado por κ_q^n e definido pelas variáveis η :

$$\kappa = \{\eta = (\mu, \Sigma) \mid \Sigma \in \mathfrak{R}^{n-1}, \mu \in \mathfrak{R}, \|\Sigma\| \leq \mu\} \quad (1)$$

onde $\|\Sigma\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} (\Sigma_i)^2}$ representa a norma euclidiana.

Um cone de segunda ordem define um conjunto convexo. O dual de um cone $\kappa \subset \mathfrak{R}^n$ é definido por:

$$\kappa' := \{\dot{\gamma} \in \mathfrak{R}^n \mid \eta \cdot \dot{\gamma} \geq 0, \forall \eta \in \kappa\} \quad (2)$$

Definidos os cones, é possível apresentar a forma típica do problema cônico de segunda ordem:

Problema primal (P)

$$\min_x \{c \cdot x \mid Ax = b; x \in \kappa\} \quad (3)$$

Problema dual (D)

$$\max_{y,s} \{b \cdot y \mid A^T y + s = c; s \in \kappa'\} \quad (4)$$

onde $c \in \mathfrak{R}^{n+p}$, $x \in \mathfrak{R}^{n+p}$, $b \in \mathfrak{R}^{1+q}$, $y \in \mathfrak{R}^{1+q}$ e $A \in \mathfrak{R}^{(1+q)(n+p)}$.

3 CRITÉRIO DE DRUCKER-PRAGER

Considerando as partes média e desviadora do tensor de tensões de segunda ordem, teremos

$$\sigma_m := \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma) = \frac{1}{3} \mathbf{1} \cdot \sigma = P_m \sigma \quad (5)$$

$$S := \sigma^{dev} = \sigma - \frac{\text{tr}(\sigma)}{3} \mathbf{1} = P \sigma \quad (6)$$

Tal que $P = I - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$. Define-se como a função de escoamento:

$$f(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2}} \|S\| + \sqrt{3} a \sigma_m - k \quad (7)$$

onde $k = \frac{3c}{\sqrt{9+12 \tan^2 \emptyset}}$ é o limite de escoamento em cisalhamento puro, c é a coesão, $a = \sqrt{3} \alpha$, α está associado ao ângulo de atrito $\emptyset$, ou seja $\tan \emptyset = \frac{3\alpha}{\sqrt{1-12\alpha^2}}$ ou $\alpha = \frac{\tan \emptyset}{\sqrt{9+12 \tan^2 \emptyset}}$. Além $f(\sigma) \leq 0$, podendo ser transformada numa restrição de igualdade-linear acoplada com outra cônica quadrática:

$$z + \sqrt{3} a \sigma_m = k \quad (8)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \|S\| \leq k - \sqrt{3} a \sigma_m \quad (9)$$

onde $\left(k - \sqrt{3} a \sigma_m, \frac{1}{\sqrt{2}} S\right) \in \kappa$ pode-se representar como a soma de R e M^T :

$$R := (k, 0) \in M^T := (\sqrt{3} a \sigma_m, \frac{1}{\sqrt{2}} S) \quad (10)$$

Da equação (10):

$$R - M^T \sigma = \left(k - \sqrt{3} a \sigma_m, -\frac{1}{\sqrt{2}} S\right) \in \kappa \quad (11)$$

$$M^T \sigma + \eta = \left(\sqrt{3} a \sigma_m + \eta_0, \frac{1}{\sqrt{2}} S + \eta_{1:5}\right) \in \kappa \quad (12)$$

É possível representar a função de dissipação com restrição cônica:

$$D(d^p) := \sup_{\sigma} \{\sigma \cdot d^p \mid M^T \sigma + \eta = R; \eta \in \kappa\} \quad (13)$$

Consequentemente, a função de dissipação admite sua forma dual:

$$D(d^p) := \inf_{\dot{\gamma}} \{R \cdot \dot{\gamma} \mid d^p = M \dot{\gamma}; \dot{\gamma} \in \kappa\} \quad (14)$$

As equações (12) e (14) podem ser escritas na forma matricial por:

$$\begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{3}} \mathbf{1} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(I - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}\right) \end{bmatrix} \sigma + \begin{bmatrix} \eta_0 \\ \eta_{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$[d^p] = \begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{3}} \mathbf{1} & \frac{1}{\sqrt{2}} \left(I - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}\right) \end{bmatrix} [\dot{\gamma}] \quad (16)$$

Os tensores de tensão, deformação, tensão desviadora, multiplicador plástico em base

ortonormal para estado plano de deformação são representados por:

$$\sigma = [\sigma_x \sigma_y \sigma_z \sqrt{2}\sigma_{xy}]^T \quad (17)$$

$$d^p = [d_x^p d_y^p d_z^p \sqrt{2}d_{xy}^p]^T \quad (18)$$

$$S = [S_x S_y S_z \sqrt{2}S_{xy}]^T \quad (19)$$

$$\eta = [\eta_0 \eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4]^T \quad (20)$$

$$\dot{\gamma} = [\dot{\gamma}_0 \dot{\gamma}_1 \dot{\gamma}_2 \dot{\gamma}_3 \dot{\gamma}_4]^T \quad (21)$$

A matriz M e o vetor R para materiais de Drucker-Prager são deduzidas e apresentadas:

$$M = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3\sqrt{2}\alpha & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 3\sqrt{2}\alpha & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 3\sqrt{2}\alpha & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$R = \begin{bmatrix} \frac{k}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

4 ANÁLISE LIMITE E PROGRAMAÇÃO CÔNICA DE SEGUNDA ORDEM (SOCP)

Considera-se a análise limite de um corpo discretizado, o fator de colapso é representado:

$$\alpha = \max_{\alpha^*, \sigma} \{ \alpha^* | B^T \sigma = \alpha^* F + F^0; f(\sigma) \leq 0 \} \quad (24)$$

Sempre que a restrição de admissibilidade plástica admite a representação cônica de segunda ordem (como na equação (13)) a formulação do colapso plástico (equação (24)) adota a forma de programação cônica de segunda ordem:

$$\alpha = \max_{\alpha^*, \sigma, \eta} \{ \alpha^* | B^T \sigma = \alpha^* F + F^0; M^T \sigma + \eta = R; \eta \in \kappa \} \quad (25)$$

$$\alpha = \min_{v, \dot{\gamma}} \{ R \cdot \dot{\gamma} - F^0 \cdot v | M \dot{\gamma} = Bv; F \cdot v = 1; \dot{\gamma} \in \kappa' \} \quad (26)$$

onde κ e κ' são cones duais. As condições de ótimo para as equações (25) e (26) são:

$$\begin{cases} B^T \sigma = \alpha^* F + F^0; B \in \mathbb{R}^{q \times n}, F \in \mathbb{R}^n \\ M \dot{\gamma} = Bv; M \in \mathbb{R}^{q \times n}, v \in \mathbb{R}^n \text{ e } \dot{\gamma} \in \mathbb{R}^p \\ F \cdot v = 1 \\ M^T \sigma + \eta = R; R \in \mathbb{R}^p, \eta \in \mathbb{R}^p \text{ e } \sigma \in \mathbb{R}^q \\ \eta \cdot \dot{\gamma}; \eta \in \kappa \text{ e } \dot{\gamma} \in \kappa' \end{cases} \quad (27)$$

Uma representação das equações (25, 26 e 27) em forma matricial para a implementação é dada por:

$$\min_x \{ c \cdot x | Ax = b; x \in \kappa \} \quad (28)$$

$$\max_{y, s} \{ b \cdot y | A^T y + s = c; s \in \kappa' \} \quad (29)$$

Identificando-se as seguintes associações:

$$c = \begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} v \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}, z = \begin{bmatrix} 0 \\ \eta \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } y = \begin{bmatrix} \alpha \\ \sigma \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$A = \begin{bmatrix} F^T & 0 \\ -B & M \end{bmatrix} \text{ e } A^T = \begin{bmatrix} F & -B^T \\ 0 & M^T \end{bmatrix} \quad (31)$$

onde $c \in \mathbb{R}^{n+p}$, $x \in \mathbb{R}^{n+p}$, $b \in \mathbb{R}^{1+q}$, $y \in \mathbb{R}^{1+q}$ e $A \in \mathbb{R}^{(1+q)(n+p)}$. O gap da dualidade é:

$$z \cdot x := \eta \cdot \dot{\gamma} = (R - M^T \sigma) \cdot \dot{\gamma} \quad (32)$$

5 APLICAÇÕES NUMÉRICAS

A análise foi feita no programa de análise limite com otimização cônica (FELA) usando o algoritmo de ponto interior implementado no pacote de software SDPT3 Tütüncü (2003) em um laptop Dell i7 (2.4 GHz CPU, 16 GB RAM) com sistema operacional Windows 10. Para pós-processamento dos resultados foi utilizado o programa GiD (Ribó, 2002).

5.1 Estabilidade de taludes

A estabilidade de taludes é um problema da geotecnia que visa à caracterização de uma potencial superfície de falha e o cálculo de um fator de segurança para uma geometria dada com condições de carga e contorno impostas, como na figura (1). O estudo de estabilidade de

taludes é importante para evitar escorregamentos, que ocorre pelo deslizamento de massa de solo em relação a uma parte fixa, de tal forma que as tensões na superfície sejam maiores que a resistência ao cisalhamento.

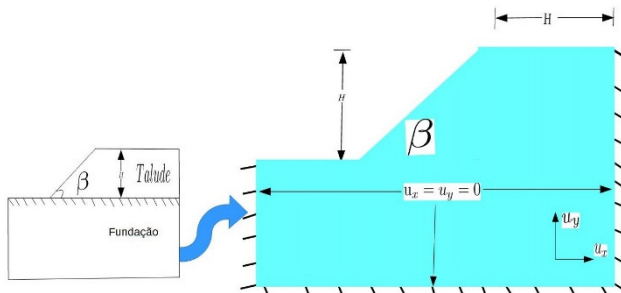


Figura 1. Geometria do talude e condições de contorno

Este é um caso da aplicação de análise limite na sua formulação mista e cinemática, onde o peso próprio é uma carga a ser amplificada, que é chamada carga viva, e por meio do fator de colapso para um talude homogêneo coesivo-friccional pode-se calcular a altura máxima que este pode alcançar de modo que estrutura seja estável, particularmente considera-se uma inclinação 40° e 60° com altura H . A quantidade de interesse (estabilidade) é medida pelo número de estabilidade:

$$N_s = \alpha \frac{\gamma H}{c_s} \quad (33)$$

onde α é o fator de colapso, γ é o peso específico, H é altura do talude e c_s é a coesão.

As soluções analíticas são encontradas em Chen (1975), que propõe uma superfície de falha log-espiral. As soluções analíticas encontradas na bibliografia para o talude de 40° e 60° são indicadas na tabela 1.

Tabela 1. Soluções analíticas para o talude de 40° e 60°

$\phi(^{\circ})$	$N_s 40^{\circ}$	$N_s 60^{\circ}$
0	5,53	5,25
5	7,84	6,16
10	10,3	7,26
15	13,97	8,63
20	19,99	10,39
25	31,33	12,74
30	58,27	16,04
35	166,38	20,94

A aproximação numérica foi realizada no programa de elementos finitos FELA.

Construiu-se duas malhas de 6021 (para o talude de 40°) e 2998 (para o talude de 60°) elementos triangulares-quadráticos e com tensão linear, conforme ilustrado na figura (2a) e (2b), respectivamente. Estudaram-se materiais de Drucker-Prager (D-P). As malhas foram criadas com o gerador de malhas Gmsh (Geuzaine, 2009).

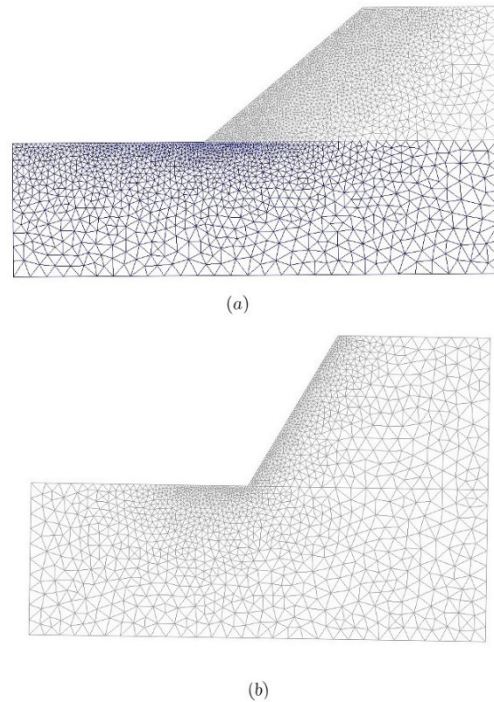


Figura 2. Malhas: (a) 6021 elementos, (b) 2998 elementos

A partir dos resultados obtidos observa-se que:

Pode-se apreciar que o valor numérico de N_s apresentado nas tabelas (2) e (3) para diferentes ângulos de atrito cumpre-se que a formulação cinemática (limite superior) $\geq$ formulação mista $\geq$ formulação estática (limite inferior). Satisfazendo assim as desigualdades para o colapso plástico formulado por Zouain (2014), e validando a aproximação numérica feita neste trabalho (usando o programa de elementos finitos - FELA). Seja $\phi = 0^\circ$ na equação (7),

$\|S\| \leq c\sqrt{2}$, quando a coesão é igual a $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$

então $\|S\| \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Nas figuras (3) e (4) mostra-se o valor numérico do tensor desviador das tensões quando $\phi = 0^\circ$ dito máximo valor de

$\|S\|$ é $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 0.8165$ assim mostrou-se que a que o programa de elementos finitos FELA é

efetivo para qualquer ângulo de atrito ϕ menor ou igual que 35° .

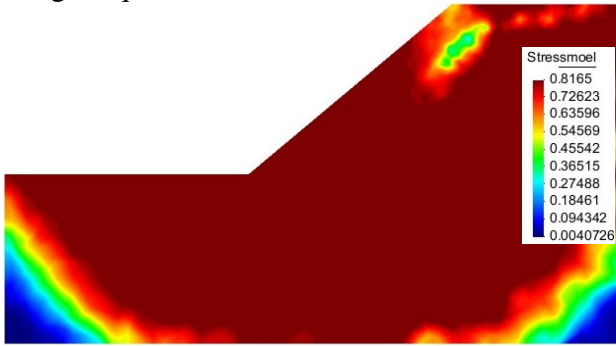


Figura 3. Módulo do tensor desviador das tensões do talude de 40° sem ângulo de atrito

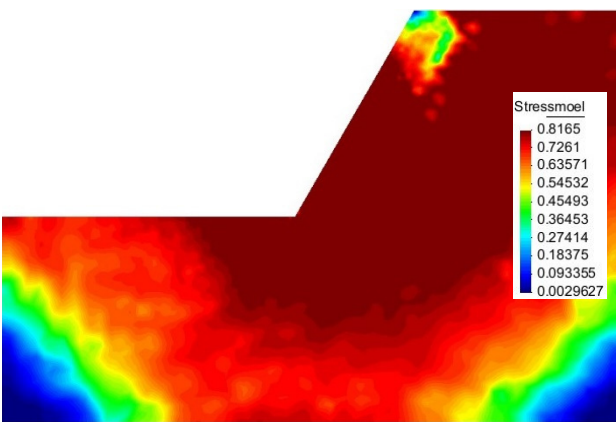


Figura 4. Módulo do tensor desviador das tensões do talude de 60° sem ângulo de atrito

Tabela 2. Coeficiente de estabilidade talude de 40°

$\phi(^{\circ})$	TE	N_s	Erro%	CPU(s)	Iter
0	$v6 - UB$	5,8528	5,8373	247,09	44
0	$\sigma 3 - v6$	5,8268	5,3671	261,57	50
5	$v6 - UB$	7,7586	1,0383	276,3	45
5	$\sigma 3 - v6$	7,7321	1,3125	264,35	50
10	$v6 - UB$	10,296	0,0437	228,55	46
10	$\sigma 3 - v6$	10,247	0,5117	237,98	47
15	$v6 - UB$	14,053	0,5963	220,62	44
15	$\sigma 3 - v6$	13,949	0,1539	226,16	45
20	$v6 - UB$	20,265	1,3757	211,57	41
20	$\sigma 3 - v6$	20,044	0,2696	226,11	43
25	$v6 - UB$	32,057	2,3189	203,23	39
25	$\sigma 3 - v6$	31,544	0,6821	214,21	40
30	$v6 - UB$	60,495	3,8181	209,11	40
30	$\sigma 3 - v6$	58,807	0,9207	226,95	42
35	$v6 - UB$	179,83	8,0808	192,71	37
35	$\sigma 3 - v6$	169,68	1,9815	207,64	40

Tabela 3. Coeficiente de estabilidade talude de 60°

$\phi(^{\circ})$	TE	N_s	Erro%	CPU(s)	Iter
0	$v6 - UB$	5,216	0,6476	62,42	33
0	$\sigma 3 - v6$	5,166	1,6	81,07	42
5	$v6 - UB$	6,1845	0,3977	85,89	44
5	$\sigma 3 - v6$	6,1046	0,8994	85,94	44
10	$v6 - UB$	7,3659	1,4587	85,99	45
10	$\sigma 3 - v6$	7,244	0,2204	82,38	44
15	$v6 - UB$	8,8307	2,3256	85,74	44
15	$\sigma 3 - v6$	8,6536	0,2735	85,04	45
20	$v6 - UB$	10,722	3,1983	84,56	43
20	$\sigma 3 - v6$	10,452	0,5967	73,81	43
25	$v6 - UB$	13,263	4,1060	74,20	39
25	$\sigma 3 - v6$	12,910	1,3367	82,80	40
30	$v6 - UB$	16,892	5,3117	73,47	38
30	$\sigma 3 - v6$	16,327	1,7905	83,24	40
35	$v6 - UB$	22,459	7,2531	74,74	38
35	$\sigma 3 - v6$	21,484	2,5969	78,41	39

Nas figuras (5) e (6) apreciam-se as superfícies de ruptura do talude de 40° com a formulação mista da análise limite e nas figuras (7) e (8) mostram-se também as superfícies de ruptura para o talude de 60° com a formulação mista.

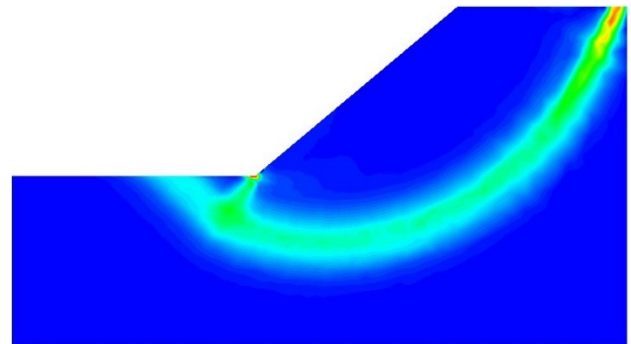


Figura 5. Módulo de Deformações Plásticas do talude de 40° sem atrito.

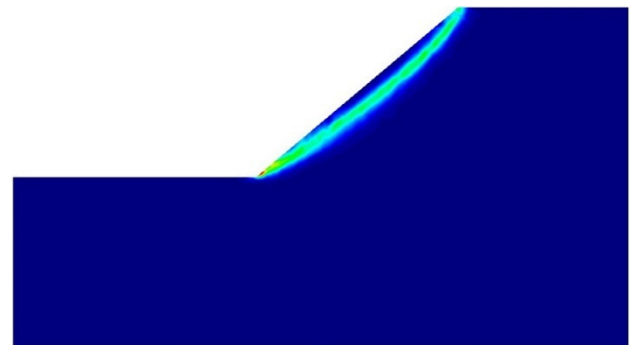


Figura 6. Módulo de Deformações Plásticas do talude de 40° com ângulo de atrito 35° .

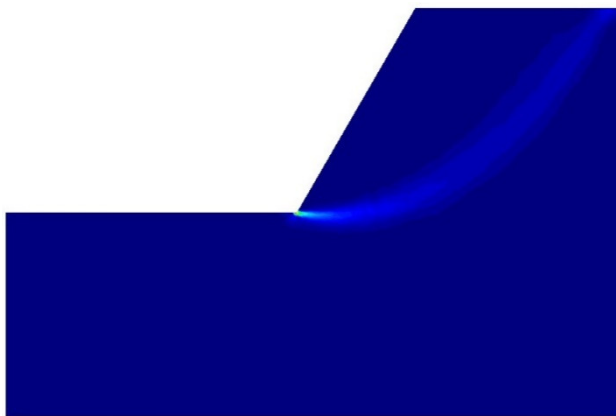


Figura 7. Módulo de Deformações Plásticas do talude de 60° sem atrito.

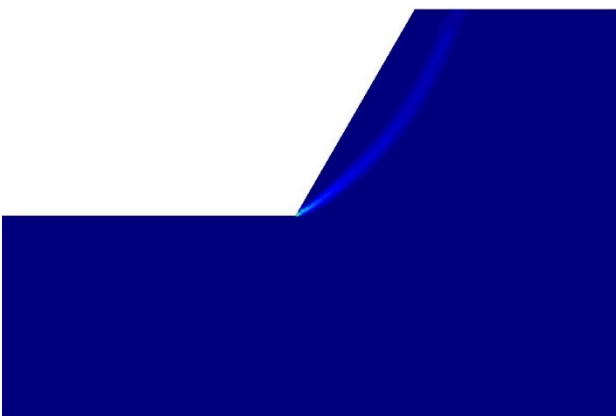


Figura 8. Módulo de Deformações Plásticas do talude de 60° com ângulo de atrito de 35°.

O problema é muito mais difícil para $\phi = 35^\circ$ do que para $\phi = 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ, 25^\circ$ e 30° , já que para os dois taludes estudados com as duas formulações da análise limite (limite superior e misto) os erros ficaram muito maiores. O crescimento do erro com ângulo de atrito é particularmente pronunciado quando se utiliza ângulo de atrito $\phi = 0^\circ$.

Em todos os casos foram gastos mais de 40 iterações no algoritmo de ponto interior.

CONCLUSÕES

No presente trabalho foi apresentada uma formulação de otimização cônica para a análise limite. Foram utilizadas as formulações cinemática e mista e os resultados obtidos indicam uma boa performance do programa de elementos finitos FELA e do código SDPT3. Foi utilizado o critério de Drucker-Prager que funcionou bem para todos os ângulos de atrito testados o que mostra a eficiência e estabilidade

da programação cônica.

REFERÊNCIAS

- Chen, W.-F. (1975), *Limit Analysis and Soil Plasticity* (Developments in Geotechnical Engineering), Elsevier Science Ltd.
- Geuzaine, C. & Remacle, J.-F. (2009), *Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities*, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, John Wiley & Sons, Ltd., 79, 1309-1331.
- Juscamayta, V. Ernesto. (2016), *Análise Limite em Geomecânica utilizando Programação Cônica*, Tese de Mestrado, Universidade Federal de Pernambuco, 78.
- Makrodimopoulos, A. & Martin, C. M. (2006), Lower bound limit analysis of cohesive-frictional materials using second-order cone programming, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, John Wiley & Sons, Ltd., 66, 604-634.
- Makrodimopoulos, A. & Martin, C. M. (2007), Upper bound limit analysis using simplex strain elements and second-order cone programming, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, John Wiley & Sons, Ltd., 31, 835-865.
- Ribó, R. & Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingenieria (Barcelona), C. I. (2002) GiD, the Personal Pre and Postprocessor: The Universal, Adaptive and User Friendly Pre and Post Processing System for Computer Analysis in Science and Engineering, CIMNE.
- Strum, J. (1999). Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones, *Optimization Methods and Software*, 11, 625-653.
- Zouain, N.; Borges, L. & Silveira, J. L. (2014), Quadratic velocity-linear stress interpolations in limit analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 98, 469-491.
- Tütüncü, R. H.; Toh, K. C. & Todd, M. J. (2003), Solving semi definite-quadratic - linear programs using SDPT3, *Mathematical Programming*, Springer-Verlag, 95, 189-217.